



Ciencia Latina
Internacional

OFERTA Y DEMANDA: CONCEPTOS BÁSICOS PARA LA ENSEÑANZA Y MODELO MATEMÁTICO





Mayo 2024 – CID - Centro de Investigación y Desarrollo

Copyright © CID - Centro de Investigación y Desarrollo

Copyright del texto © 2024 de Autores

biblioteca.ciencialatina.org

editorial@ciencialatina.org

Atención por WhatsApp al +52 22 2690 3834

Datos Técnicos de Publicación Internacional
Título: Oferta y Demanda: Conceptos Básicos para la enseñanza y Modelo Matemático
Autores: Miriam Elena Asqui Aguilar, Priscila Isabel Zumba Game, Gisela Zoraya Jácome Rodríguez, María Piedad Véliz Torres, Yessenia Lenny Lino Sánchez
Editor: CID - Centro de Investigación y Desarrollo
Diseño de tapa: CID - Centro de Investigación y Desarrollo
Corrección de Estilo: CID - Centro de Investigación y Desarrollo
Formato: PDF
Páginas: 94 pág.
Tamaño: A4 21x29.7cm
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acceso: World Wide Web
ISBN: 978-99989-67-29-8
DOI: https://doi.org/10.37811/cli_w1066

1ª. Edición. Año 2024. Editorial CID - Centro de Investigación y Desarrollo.

El contenido del libro y sus datos en su forma, corrección y fiabilidad son responsabilidad exclusiva de los autores. Permite la descarga de la obra y compartir siempre que los créditos se atribuyan a los autores, pero sin la posibilidad de cambiarlo de cualquier forma o utilizarlo con fines comerciales

Prohibida su reproducción por cualquier medio.

Distribución gratuita

Oferta y Demanda: Conceptos Básicos para la enseñanza y Modelo Matemático

Autores:

Miriam Elena Asqui Aguilar

Priscila Isabel Zumba Game

Gisela Zoraya Jácome Rodríguez

María Piedad Véliz Torres

Yessenia Lenny Lino Sánchez

Dedicatoria

Con mucho cariño y aprecio para nuestros alumnos que son la razón de ser en nuestro día a día.

PRÓLOGO

El prólogo del libro "Oferta y Demanda" introduce a los lectores al tema central del libro: cómo funcionan los conceptos de oferta y demanda en la economía desde el punto de vista de un modelo matemático. Los autores ofrecen una visión general de los conceptos básicos como son límite de funciones reales en el capítulo uno y en el capítulo 02 muestra una serie de ejemplos resueltos de aplicaciones de la derivada que los lectores pueden revisar y utilizar para material de enseñanza, destacando la importancia de comprender estos conceptos en el ámbito económico.

INDICE

PRÓLOGO.....	5
CAPÍTULO 01	8
Limites Y Continuidad De Funciones Reales.....	8
CAPÍTULO 02	53
Aplicaciones De La Derivada	53
CAPÍTULO 03	68
Oferta Y Demanda: Modelo Matemático Con Ecuaciones Diferenciales.....	68
REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS	89

CAPITULO 01

LIMITES Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES REALES

CAPÍTULO 01

Límites Y Continuidad De Funciones Reales

1. **DEFINICION:** Sea f una función definida en todo número de algún intervalo abierto I que contenga a " a ", excepto posiblemente en el número a mismo. El límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es L y se escribe $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, si el siguiente enunciado es verdadero:

Dado cualquier $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

Una interpretación grafica de la definición se muestra en la fig. 1

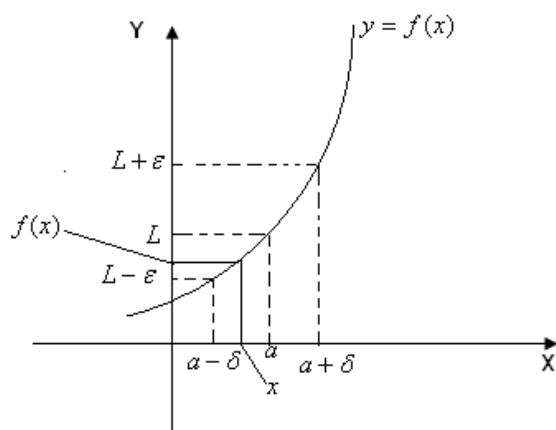


Fig. 1

Tener en cuenta que el $0 < \varepsilon < 1$, entonces $0 < \delta < 1$

EJEMPLOS ILUSTRATIVOS.

Ejemplo 1. Sea la función $f(x) = 4x - 7$

a) Pruebe que $\lim_{x \rightarrow 3} (4x - 7) = 5$

b) Para $\varepsilon = 0,01$, determine el δ correspondiente

Solución:

a) De acuerdo a la definición se tiene:

Dado $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que si $0 < |x - 3| < \delta \Rightarrow |(4x - 7) - 5| < \varepsilon \dots\dots(*)$

En Efecto, partimos de:

$$|(4x-7)-5| < \varepsilon \Rightarrow |4x-12| < \varepsilon \Rightarrow 4|x-3| < \varepsilon \Rightarrow |x-3| < \frac{\varepsilon}{4} \dots(1)$$

Como $|x-3| < \delta$, tomando en cuenta (1), tome $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$

Por lo tanto hemos establecido que si $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$, el enunciado (*) se cumple, lo que prueba que

$$\lim_{x \rightarrow 3} (4x-7) = 5$$

$$b) \text{ Si } \varepsilon = 0,01 \Rightarrow \delta = \frac{0,01}{4} \Rightarrow \delta = 0,0025$$

Ejemplo 2. Si $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$, probar que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 6$

Solución:

Dado $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que si $0 < |x-1| < \delta \Rightarrow |(3x^2 + 2x + 1) - 6| < \varepsilon \dots\dots(*)$

$$\text{Tome } |3x^2 + 2x + 1 - 6| < \varepsilon \Leftrightarrow |3x^2 + 2x - 5| < \varepsilon \Leftrightarrow |x-1||3x+5| < \varepsilon \dots(1)$$

Debemos mayorar $|3x+5|$, para ello tome $|x-1| < 1$, en efecto

$$\text{Si } |x-1| < 1 \Rightarrow -1 < x-1 < 1 \Rightarrow 0 < x < 2 \Rightarrow 0 < 3x < 6$$

$$\Rightarrow 5 < 3x+5 < 11 \Leftrightarrow -11 < 3x+5 < 11 \Rightarrow |3x+5| < 11 \dots\dots\dots(2)$$

$$\text{Como por hipótesis } |x-1| < \delta \dots\dots\dots(3)$$

$$\text{Multiplicando (2) con (3) se tiene: } |x-1||3x+5| < 11\delta \dots\dots\dots(4)$$

$$\text{Igualando extremos de (1) y (4) se tiene } 11\delta = \varepsilon \Rightarrow \delta = \frac{\varepsilon}{11}$$

Luego, para $\varepsilon > 0, \exists \delta = \frac{\varepsilon}{11}$, por lo que podemos afirmar que: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 6$

NOTA. Para poder probar la existencia del límite mediante la definición, es suficiente determinar el δ que dependa del $\varepsilon > 0$

Ejemplo 3. Sea $f(x) = \frac{x+3}{x-3}$, probar que $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 4$

Solución: Por definición de límite se tiene: $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x+3}{x-3} = 4$ si y sólo si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / 0 < |x-5| < \delta \Rightarrow \left| \frac{x+3}{x-3} - 4 \right| < \varepsilon$$

$$\text{Tome: } \left| \frac{x+3}{x-3} - 4 \right| = \left| \frac{x+3-4x+12}{x-3} \right| = \left| \frac{-3x+15}{x-3} \right| = \left| \frac{-3(x-5)}{x-3} \right| = \left| \frac{3}{x-3} \right| |x-5|$$

$$\Rightarrow \left| \frac{3}{x-3} \right| |x-5| < \varepsilon \dots\dots\dots(1)$$

Debemos acotar $\left| \frac{1}{x-3} \right|$, para ello tome $\delta_1 = \frac{1}{2}|5-3| = 1$, luego se tiene:

$$|x-5| < \delta_1 = 1 \Rightarrow -1 < x-5 < 1 \Rightarrow 4 < x < 6 \Rightarrow 1 < x-3 < 3$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} < \frac{1}{x-3} < 1 \Rightarrow 1 < \frac{3}{x-3} < 3 \Rightarrow \left| \frac{3}{x-3} \right| < 3 \dots\dots\dots(2)$$

Como por hipótesis se tiene: $|x-5| < \delta \dots\dots\dots(3)$

Multiplicando (2) y (3), se tiene: $\left| \frac{3}{x-3} \right| |x-5| < 3\delta \dots\dots\dots(4)$

Igualando extremos en (1) y (4), se tiene: $3\delta = \varepsilon \Rightarrow \delta = \frac{\varepsilon}{3}$

Por lo tanto, para, $\varepsilon > 0, \exists \delta = \frac{\varepsilon}{3}$, por lo que podemos afirmar que: $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x+3}{x-3} = 4$

2. PROPIEDADES OPERACIONALES DE LOS LÍMITES. Sean f y g dos funciones tales que

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \wedge \lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$, entonces:

a) $\lim_{x \rightarrow a} k = k$, donde k es una constante

b) $\lim_{x \rightarrow a} [kf(x)] = k \lim_{x \rightarrow a} f(x) = kL$, donde k es una constante

c) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L \pm M$

d) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L \cdot M$

e) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{1}{M}$; $M \neq 0$

f) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{L}{M}$; $M \neq 0$

g) $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$

2.1. Teorema del Sandwich

Considere tres funciones $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ tales que

(i) $f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \forall x \neq x_0 \quad y$

(ii) Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = L \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L$

Ejemplo 4. Hallar $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x^2 - 10x - 6}{x^3 - 10}$

Solución: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x^2 - 10x - 6}{x^3 - 10} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} 5x^2 - 10x - 6}{\lim_{x \rightarrow 2} x^3 - 10} = \frac{20 - 20 - 6}{8 - 10} = \frac{-6}{-2} = 3$

Ejemplo 5. Hallar $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x - 6}{x^2 - 3x + 2}$

Solución: Al reemplazar $x = 1$ se tiene: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x - 6}{x^2 - 3x + 2} = \frac{6 - 6}{1 - 3 + 2} = \frac{0}{0}$..F.I

Para poder levantar la indeterminación, se factoriza el numerador y denominador, esto es:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x-6}{x^2-3x+2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6}{x-2} = \frac{6}{-1} = -6$$

Observación 1. Las formas de indeterminación son:

$$\frac{0}{0}; \quad \frac{\infty}{\infty}; \quad \infty - \infty; \quad 0 \cdot \infty; \quad 0^0; \quad 1^\infty; \quad \infty^0$$

Ejemplo 6. Hallar $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{2-x} - \frac{12}{8-x^3} \right)$

Solución: Vemos que. al sustituir $x = 2$ en los denominadores estos resultan cero, luego:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{2-x} - \frac{12}{8-x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{2-x} - \frac{12}{(2-x)(x^2+2x+4)} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^2+2x+4-12}{(2-x)(x^2+2x+4)} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^2+2x-8}{(2-x)(x^2+2x+4)} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{(x-2)(x+4)}{-(x-2)(x^2+2x+4)} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \left(-\frac{x+4}{x^2+2x+4} \right) = -\frac{6}{12} = -\frac{1}{2}$$

Ejemplo 7. Calcular $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{6+x}-3}{\sqrt{4-x}-1}$

Solución: Este límite es de la forma $\frac{0}{0}$, para poderlo resolver efectuamos una doble

racionalización, esto es:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{6+x}-3}{\sqrt{4-x}-1} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{6+x}-3)(\sqrt{6+x}+3)(\sqrt{4-x}+1)}{(\sqrt{4-x}-1)(\sqrt{4-x}+1)(\sqrt{6+x}+3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(6+x-9)(\sqrt{4-x}+1)}{(4-x-1)(\sqrt{6+x}+3)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(\sqrt{4-x}+1)}{(3-x)(\sqrt{6+x}+3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(\sqrt{4-x}+1)}{-(x-3)(\sqrt{6+x}+3)} = \lim_{x \rightarrow 3} -\frac{\sqrt{4-x}+1}{\sqrt{6+x}+3} = -\frac{1+1}{3+3} = -\frac{1}{3}$$

Observación 2. Para la racionalización es necesario recordar:

$$(i) \quad (a^n - b^n) = (a-b) \underbrace{(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})}_{\text{Factor racionalizador}}$$

$$(ii) \quad (a^n + b^n) = (a+b) \underbrace{(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots - ab^{n-2} + b^{n-1})}_{\text{Factor racionalizador}},$$

si n es impar

Ejemplo 8. Si $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x+27}-3}{\sqrt[4]{x+16}-2}$, evaluar $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

Solución: Por sustitución directa resulta $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+27}-3}{\sqrt[4]{x+16}-2} = \frac{0}{0}$ F.I.

(a) Como $x \rightarrow 0$, buscamos el factor “x” para racionalizar el numerador y el denominado cuyos factores son:

$$FRN(a, b) = a^2 + ab + b^2, \text{ donde } a = \sqrt[3]{x+27} \wedge b = \sqrt[3]{27}$$

$$FRD(a, b) = a^3 + a^2b + ab^2 + b^3, \text{ donde } a = \sqrt[4]{x+16} \wedge b = \sqrt[4]{16}$$

(b) Determinamos el valor para cada factor de racionalización, en efecto

$$\lim_{x \rightarrow a} FR(a, b) = n \cdot \lim_{x \rightarrow a} (b)^{n-1}, \text{ para cada caso se tiene.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} FRN(a, b) = 3 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt[3]{27})^2 = 27$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} FRD(a, b) = 4 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt[4]{16})^3 = 32$$

(c) Racionalizamos la expresión

$$f(x) = \frac{(\sqrt[3]{x+27}-3) \cdot FRN(a, b) \cdot FRD(a, b)}{(\sqrt[4]{x+16}-2) \cdot FRD(a, b) \cdot FRN(a, b)}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{[(\sqrt[3]{x+27})^3 - (\sqrt[3]{27})^3] FRD(a, b)}{[(\sqrt[4]{x+16})^4 - (\sqrt[4]{16})^4] FRN(a, b)} = \frac{[(x+27) - 27] FRD(a, b)}{[(x+16) - 16] FRN(a, b)}$$

$$\text{Resultando para } x \neq 0, \Rightarrow f(x) = \frac{FRD(a, b)}{FRN(a, b)}$$

$$\text{Por lo tanto: } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{FRD(a, b)}{FRN(a, b)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} FRD(a, b)}{\lim_{x \rightarrow 0} FRN(a, b)} = \frac{32}{27}$$

3. LIMITES LATERALES

Cuando se calcula $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, el problema se reduce a encontrar el número L al cual se aproximan los valores de $f(x)$ cuando x tiende hacia a , tanto por valores menores que a (por la izquierda), como para valores mayores que a (por la derecha).

Notaciones:

(1) Límite por la izquierda: $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ (2) Límite por la derecha: $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$

Proposición. El $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$

Ejemplo 9. Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3, & \text{si } x > 1 \\ 1, & \text{si } x = 1 \\ -1 - x, & \text{si } x < 1 \end{cases}$

Calcular el límite de $f(x)$ y trazar la gráfica.

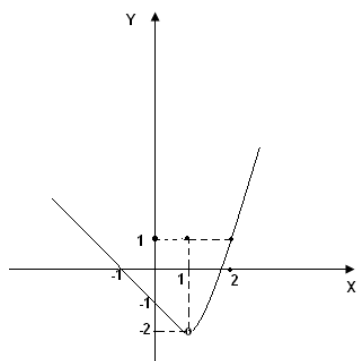
Solución: Observamos que antes de 1 y después de 1 la función tiene diferentes reglas de correspondencia, por lo que es necesario calcular los límites laterales

a) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} -1 - x = -1 - 1 = -2$

b) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 - 3 = 1 - 3 = -2$

Puesto que: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -2$

c) Graficando



Ejemplo 10. Sea $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2, & \text{si } x \leq 2 \\ 2, & \text{si } 2 < x \leq 5 \\ x - 5, & \text{si } x > 5 \end{cases}$

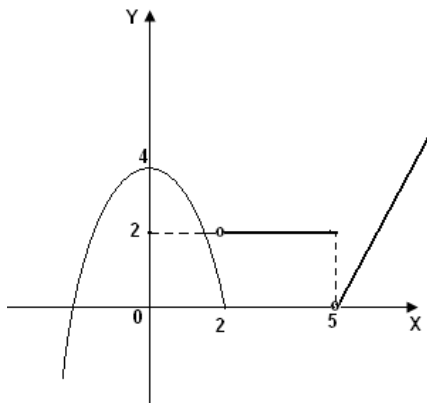
a) Calcular si existe $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$ b) Trazar la grafica de esta función.

Solución:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} 4 - x^2 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} 2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \Rightarrow \text{no } \exists \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^-} 2 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} x - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) \Rightarrow \text{no } \exists \lim_{x \rightarrow 5} f(x)$$

b) Graficando:



4. LIMITES AL INFINITO. Sea $f : (a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida en el intervalo $(a, +\infty)$, el límite de la función $f(x)$ cuando “x” crece sin límite es el número “L” y se denota por

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

Análogamente: Sea $f : (-\infty, a) \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida en el intervalo $(-\infty, a)$, el límite de la función $f(x)$ cuando “x” crece sin límite es el número “L” y se denota por $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$

4.1. Proposición. Sea n un número entero positivo cualquiera entonces se cumple:

$$(i) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \qquad (ii) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

EJEMPLOS ILUSTRATIVOS: Calcular los siguientes límites

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 4}{4x^3 + 3x^2 + 2x + 1}$$

Solución: La forma más práctica de calcular los límites cuando $x \rightarrow +\infty$ ó $x \rightarrow -\infty$, es dividiendo tanto el numerador como el denominador, entre la mayor potencia de “x” del divisor que aparece en la expresión dada, luego de aplica el criterio de la proposición 4.1. Para nuestro caso dividimos entre x^3 .

En efecto

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 4}{4x^3 + 3x^2 + 2x + 1} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^3}{x^3} + \frac{2x^2}{x^3} + \frac{3x}{x^3} + \frac{4}{x^3}}{\frac{4x^3}{x^3} + \frac{3x^2}{x^3} + \frac{2x}{x^3} + \frac{1}{x^3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{4}{x^3}}{4 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}} = \frac{1 + 0 + 0 + 0}{4 + 0 + 0 + 0} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 3x - 4}{\sqrt{x^4 + 1}}$$

Solución: Como “x” toma valores bastante grandes, se toma $x^2 = \sqrt{x^4}$ con lo cual dividimos el numerador y denominador entre $x^2 = \sqrt{x^4}$ se tiene:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 3x - 4}{\sqrt{x^4 + 1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2} - \frac{3x}{x^2} - \frac{4}{x^2}}{\sqrt{\frac{x^4}{x^4} + \frac{1}{x^4}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}} = \frac{2 + 0 + 0}{\sqrt{1 + 0}} = 2$$

4.2. Proposición. Si $f(x) = \frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_n}$, donde m, n son enteros positivos, a_0, b_0

son números reales, con $b_0 \neq 0$, se tiene:

$$(i) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{a_0}{b_0}, \text{ si } m = n \quad (ii) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0, \text{ si } m < n$$

$$(iii) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \text{ si } m > n \text{ y } \frac{a_0}{b_0} > 0$$

$$(iv) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty, \text{ si } m > n \text{ y } \frac{a_0}{b_0} < 0$$

$$3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x-3)^2(5-3x)^3}{(3x^3-2)(1-2x)^2}$$

Solución: Factorizando en el numerador y denominador, se tiene:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2(2-3/x)^2 \cdot x^3(5/x-3)^3}{x^3(3-2/x^3) \cdot x^2(1/x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2-3/x)^2(5/x-3)^3}{(3-2/x^3)(1/x-2)^3} = \frac{2^2 \cdot (-3)^3}{3 \cdot (-2)^2} = -9$$

$$4. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 2x - 1} - \sqrt{x^2 - 7x + 2})$$

Solución: Para poder aplicar las proposiciones correspondientes, es necesario expresar la función como un cociente, en efecto

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 2x - 1} - \sqrt{x^2 - 7x + 2}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x - 4}{(\sqrt{x^2 - 2x - 1} + \sqrt{x^2 - 7x + 2})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(5 - 4/x)}{|x|\sqrt{1 - 2/x - 1/x^2} + |x|\sqrt{1 - 7/x + 2/x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(5 - 4/x)}{\sqrt{1 - 2/x - 1/x^2} + \sqrt{1 - 7/x + 2/x^2}} = \frac{5}{1+1} = \frac{5}{2}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 + 3x^2 + 7x + 5}{x^2 + 4x + 7} - \sqrt[3]{x^3 + 2x^2 - 30} \right)$$

Solución. Se observa que el numerador es de grado mayor que el denominador, en este caso se resta y suma "x" a la vez para luego hacer las operaciones respectivas.

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 + 3x^2 + 7x + 5}{x^2 + 4x + 7} - \sqrt[3]{x^3 + 2x^2 - 30} \right)$$

$$\Rightarrow L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 + 3x^2 + 7x + 5}{x^2 + 4x + 7} - x \right) - (-x + \sqrt[3]{x^3 + 2x^2 - 30})$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-x^2 + 5}{x^2 + 4x + 7} + \frac{-2x^2 + 30}{x^2 + x^3 \sqrt{x^3 + 2x^2 - 30} + \sqrt[3]{(x^3 + 2x^2 - 30)^2}} \right)$$

Ahora dividimos numerador y denominador entre x^2

$$\Rightarrow L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-1 + \frac{5}{x^2}}{1 + \frac{4}{x} + \frac{7}{x^2}} + \frac{-2 + \frac{30}{x^2}}{1 + \sqrt[3]{1 + \frac{2}{x} - \frac{30}{x^3}} + \sqrt[3]{\left(1 + \frac{2}{x} - \frac{30}{x^3}\right)^2}} \right)$$

$$= \frac{-1 + 0}{1 + 0 + 0} + \frac{-2 + 0}{1 + \sqrt[3]{1 + 0 + 0} + \sqrt[3]{1 + 0 + 0}} = -1 - \frac{2}{3} = -\frac{5}{3}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + 2}}}}{\sqrt{x + 2}}$$

Solución. Como “x” toma valores positivos dividimos numerador y denominador entre $\sqrt{x}$, en efecto:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + 2}}}}{\sqrt{x + 2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^3} + \frac{2}{x^4}}}}}{\sqrt{1 + \frac{2}{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + \sqrt{0 + \sqrt{0}}}}{\sqrt{1 + 0}} \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + 2}}}}{\sqrt{x + 2}} = 1$$

$$7. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^3 + 5x^2 - 4}{x^2 + x - 1} - \sqrt{9x^2 + 2x + 3} \right)$$

Solución: Para poder evaluar este límite, debemos eliminar el término $3x^3$ y obtener una función racional cuyo numerador y denominador sea del mismo grado. Para ello restamos y sumamos “3x” a la vez, luego hacer las operaciones respectivas, esto es:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^3 + 5x^2 - 4}{x^2 + x - 1} - \sqrt{9x^2 + 2x + 3} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{3x^3 + 5x^2 - 4}{x^2 + x - 1} - 3x \right) - \left(\sqrt{9x^2 + 2x + 3} - 3x \right) \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 + 3x - 4}{x^2 + x - 1} - \frac{2x + 3}{\sqrt{9x^2 + 2x + 3} + 3x} \right)$$

$$= 2 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(2 + 3/x)}{x(\sqrt{9 + 2/x + 3/x^2} + 3)} = 2 - \frac{2 + 0}{\sqrt{9 + 0 + 0} + 3} = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$$

5. LÍMITES TRIGONOMETRICOS. Para el cálculo de los límites trigonométricos se requiere establecer algunos límites básicos y estos se mencionan en la siguiente proposición.

5.1. Proposición:

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} \text{Sen } x = 0 \qquad (ii) \lim_{x \rightarrow 0} \text{Cos } x = 1$$

$$(iii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Sen } x}{x} = 1 \qquad (iv) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Tg } x}{x} = 1$$

$$(v) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \text{Cos } x}{x} = 0 \qquad (vi) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \text{Cos } x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

5.2 Proposición: Límites de las funciones trigonométricas inversas

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} \text{arc Sen } x = 0 \qquad (ii) \lim_{x \rightarrow 0^+} \text{arc Cos } x = \frac{\pi}{2}$$

$$(iii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{arc Sen } x}{x} = 1 \qquad (iv) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{arc Tg } x}{x} = 1$$

$$(v) \lim_{x \rightarrow -\infty} \text{arc Tg } x = -\frac{\pi}{2} \qquad (vi) \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{arc Tg } x = \frac{\pi}{2}$$

5.3. Proposición

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\text{Sen } x} = 1 \qquad (ii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\text{Tg } x} = 1$$

EJEMPLOS ILUSTRATIVOS. Calcular los siguientes límites trigonométricos:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Sen } 6x}{x}$$

$$\text{Solución: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Sen } 6x}{x} = 6 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Sen } 6x}{6x} = 6(1) = 6$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\text{Sen } \pi x}{\text{Sen } 3\pi x} \right)$$

$$\text{Solución: } L = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\text{Sen } \pi x}{\text{Sen } 3\pi x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\text{Sen } \pi x}{\pi x} \right) \left(\frac{3\pi x}{\text{Sen } 3\pi x} \right) \left(\frac{1}{3} \right)$$

Es evidente que como $x \rightarrow 0$; $\pi x \rightarrow 0$; $3\pi x \rightarrow 0$, entonces

$$L = \frac{1}{3} \lim_{\pi x \rightarrow 0} \left(\frac{\text{Sen } \pi x}{\pi x} \right) \cdot \lim_{3\pi x \rightarrow 0} \left(\frac{3\pi x}{\text{Sen } 3\pi x} \right) = \frac{1}{3} (1)(1) = \frac{1}{3}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \sqrt{\text{Cos } x}}{x^2} \right)$$

Solución: Racionalizando se tiene:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \sqrt{\text{Cos } x}}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(1 - \sqrt{\text{Cos } x})(1 + \sqrt{\text{Cos } x})}{x^2(1 + \sqrt{\text{Cos } x})} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \text{Cos } x}{x^2(1 + \sqrt{\text{Cos } x})}$$

Como: $1 - \text{Cos } x = \frac{\text{Sen}^2 x}{1 + \text{Cos } x}$, se tiene:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\text{Sen } x}{x} \right)^2 \left[\frac{1}{(1 + \sqrt{\text{Cos } x})(1 + \text{Cos } x)} \right] = 1 \left[\frac{1}{(1+1)(1+1)} \right] = \frac{1}{4}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \pi/4} \left(\frac{\text{Sec}^2 x - 2\text{Tg } x}{1 + \text{Cos } 4x} \right)$$

Solución: Expresamos la función en términos de senos y cosenos, esto es:

$$\lim_{x \rightarrow \pi/4} \left(\frac{\text{Sec}^2 x - 2\text{Tg } x}{1 + \text{Cos } 4x} \right) = \lim_{x \rightarrow \pi/4} \left(\frac{\frac{1}{\text{Cos}^2 x} - 2 \frac{\text{Sen } x}{\text{Cos } x}}{2\text{Cos}^2 2x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pi/4} \left(\frac{1 - 2\text{Sen } x \text{Cos } x}{2\text{Cos}^2 x \text{Cos}^2 2x} \right) = \lim_{x \rightarrow \pi/4} \left(\frac{1 - \text{Sen } 2x}{2\text{Cos}^2 x (1 - \text{Sen}^2 2x)} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pi/4} \left(\frac{1}{2 \cos^2 x (1 + \sin^2 2x)} \right) = \frac{1}{2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 (1+1)} = \frac{1}{2}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin^3 2x}{x \sin^2 3x} \right)$$

$$\text{Solución: } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin^3 2x}{x \sin^2 3x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin^3 2x}{x} \right) \left(\frac{1}{\sin^2 3x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{2x} \right)^3 \left(\frac{3x}{\sin 3x} \right)^2 \frac{8x^2}{9x^2} = (1)^3 (1)^2 \frac{8}{9} = \frac{8}{9}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{1+x \sin x} - \sqrt{\cos 2x}}{\operatorname{Tg}^2(x/2)} \right)$$

Solución: Racionalizando el numerador, esto es:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{1+x \sin x} - \sqrt{\cos 2x}}{\operatorname{Tg}^2(x/2)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x \sin x - \cos 2x}{(\sqrt{1+x \sin x} + \sqrt{\cos 2x}) \cdot \operatorname{Tg}^2(x/2)} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x \sin x + 2 \sin^2 x}{(\sqrt{1+x \sin x} + \sqrt{\cos 2x}) \cdot \operatorname{Tg}^2(x/2)} \right)$$

Observamos que cuando $x \rightarrow 0$, entonces $(\sqrt{1+x \sin x} + \sqrt{\cos 2x}) \rightarrow 2$, resultando:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x \sin x + 2 \sin^2 x}{(\sqrt{1+x \sin x} + \sqrt{\cos 2x}) \cdot \operatorname{Tg}^2(x/2)} \right) = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x \sin x + 2 \sin^2 x}{\operatorname{Tg}^2(x/2)} \right) \dots (1)$$

Dado que en (1) persiste la indeterminada, dividimos el numerador y denominador entre x^2 , esto es

$$L = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{\sin x}{x} + 2 \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2}{\frac{1}{4} \left(\frac{\operatorname{Tg}(x/2)}{x/2} \right)^2} \right) = \frac{1}{2} (4) \left(\frac{1+2(1)^2}{(1)^2} \right) = 6$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\text{Sen } 3\pi x + \text{Cos } \pi x + 1}{x^2 - 1} \right)$$

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\text{Sen } 3\pi x + \text{Cos } \pi x + 1}{x^2 - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x+1} \right) \left(\frac{\text{Sen } 3\pi x + \text{Cos } \pi x + 1}{x-1} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\text{Sen } 3\pi x + \text{Cos } \pi x + 1}{x-1} \right), \text{ cambiando variable, tome: } u = x - 1, \quad \Rightarrow x = u + 1. \text{ Si } x$$

$\rightarrow 1$, entonces $u \rightarrow 0$

$$\text{Luego: } L = \frac{1}{2} \lim_{u \rightarrow 0} \left(\frac{\text{Sen } 3\pi(u+1) + \text{Cos } \pi(u+1) + 1}{u} \right) \dots\dots\dots(1)$$

$$\text{Tome: } \begin{cases} \text{Sen}(3\pi + 3\pi u) = -\text{Sen } 3\pi u \\ \text{Cos}(\pi + \pi u) = -\text{Cos } \pi u \end{cases}, \text{ reemplazando en (1)}$$

$$L = \frac{1}{2} \lim_{u \rightarrow 0} \left(\frac{-\text{Sen } 3\pi u - \text{Cos } \pi u + 1}{u} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left[-3\pi \lim_{u \rightarrow 0} \left(\frac{\text{Sen } 3\pi u}{3\pi u} \right) + \pi \lim_{u \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \text{Cos } \pi u}{\pi u} \right) \right]$$

$$\text{Por lo tanto: } L = \frac{1}{2} [-3\pi(1) + \pi(0)] = -\frac{3\pi}{2}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{\text{Sen } \pi x}{3 - x} \right)$$

Solución: Tome $y = x - 3$; si $x \rightarrow 3$, entonces $y \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{\text{Sen } \pi x}{3 - x} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{\text{Sen}(\pi y + 3\pi)}{-y} \right)$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{\text{Sen } \pi y + \text{Cos } 3\pi + \text{Cos } \pi y + \text{Sen } 3\pi}{-y} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{-\text{Sen } \pi y}{-y} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \pi \left(\frac{\text{Sen } \pi y}{\pi y} \right) = \pi$$

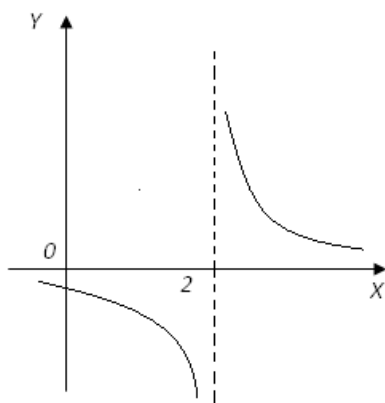
$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \text{Cos}(\text{Sen } 4x)}{\text{Sen}^2(\text{Sen } 3x)} \right)$$

$$\begin{aligned}
 \text{Solución: } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos(\text{Sen} 4x)}{\text{Sen}^2(\text{Sen} 3x)} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\text{Sen}^2 4x \left(\frac{1 - \cos(\text{Sen} 4x)}{\text{Sen}^2 4x} \right)}{\text{Sen}^2 3x \left(\frac{\text{Sen}(\text{Sen} 3x)}{\text{Sen} 3x} \right)^2} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{\text{Sen}^2 4x}{x^2} \left(\frac{1 - \cos(\text{Sen} 4x)}{\text{Sen}^2 4x} \right)}{\frac{\text{Sen}^2 3x}{x^2} \left(\frac{\text{Sen}(\text{Sen} 3x)}{\text{Sen} 3x} \right)^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{16 \left(\frac{\text{Sen} 4x}{4x} \right)^2 \left(\frac{1 - \cos(\text{Sen} 4x)}{\text{Sen}^2 4x} \right)}{9 \left(\frac{\text{Sen} 3x}{3x} \right)^2 \left(\frac{\text{Sen}(\text{Sen} 3x)}{\text{Sen} 3x} \right)^2} \right) \\
 &= \frac{16(1)\left(\frac{1}{2}\right)}{9(1)(1)} = \frac{8}{9}
 \end{aligned}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos 6x}{\text{Sen} 6x} \right)$$

$$\text{Solución: } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos 6x}{\text{Sen} 6x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{6x}{\text{Sen} 6x} \right) \left(\frac{1 - \cos 6x}{6x} \right) = 1(0) = 0$$

6. LIMITES INFINITOS. Sea la función $f(x) = \frac{1}{x-2}$, cuya gráfica es:



En la gráfica se observa que cuando x se aproxima a 2 por la derecha la función $f(x)$ crece sin límite y su notación es :

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$$

y cuando x se aproxima a 2 por la izquierda $f(x)$ decrece sin límite y su notación es

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$$

A estos tipos de límites se les llama límites infinitos.

6.1. Proposición. Si “ n ” es un número entero positivo cualquiera, entonces:

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty \quad (ii) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} -\infty, & \text{si } n \text{ es impar} \\ +\infty, & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

6.2. Propiedades.

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, donde “ a ” es un número real y $L \neq 0$, entonces:

(i) Si $g(x) \rightarrow 0$ para valores positivos de $g(x)$, es decir $g(x) > 0$ entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} a) + \infty, & \text{si } L > 0 \\ b) - \infty, & \text{si } L < 0 \end{cases}$$

(ii) $g(x) \rightarrow 0$ para valores negativos de $g(x)$, es decir $g(x) < 0$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} a) - \infty, & \text{si } L > 0 \\ b) + \infty, & \text{si } L < 0 \end{cases}$$

EJEMPLOS ILUSTRATIVOS: Evaluar los siguientes límites

$$1. \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+2}{x^2-4}$$

$$\text{Solución: } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+2}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{5x^3+1}{2-x-x^2}$$

$$\text{Solución: } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{5x^3+1}{2-x-x^2} = -\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{5x^3+1}{x^2+x-2} = -\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{5x^3+1}{(x+2)(x-1)} = -\frac{-4}{0^-} = -\infty$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{\sqrt{16-x^2}}{x-4}$$

$$\text{Solución: } \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{\sqrt{16-x^2}}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{16-x^2}{(x-4)\sqrt{16-x^2}} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{(4-x)(x+4)}{(x-4)\sqrt{16-x^2}}$$

$$= -\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{(x-4)(x+4)}{(x-4)\sqrt{16-x^2}} = -\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{(x+4)}{\sqrt{16-x^2}} = \frac{-8}{0^+} = -\infty$$

$$4. \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x^2-4} \right)$$

$$\text{Solución: } \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x^2-4} \right) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+2-1}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+1}{(x-2)(x+2)}$$

En el denominador: $x > 2 \Rightarrow x-2 > 0 \quad \wedge \quad x+2 > 0$

$$\text{Por lo tanto: } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+1}{(x-2)(x+2)} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

$$5. \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2+4x-21}{x^3-5x^2+3x+9}$$

$$\text{Solución: } \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2+4x-21}{x^3-5x^2+3x+9} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(x+7)(x-3)}{(x-3)^2(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(x+7)}{(x-3)(x+1)}$$

En el denominador $x < 3 \Rightarrow x-3 < 0 \quad \wedge \quad x+1 > 0$

$$\text{Por lo tanto: } \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2+4x-21}{x^3-5x^2+3x+9} = \frac{10}{0^-} = -\infty$$

6.3. LÍMITES INFINITOS EN INFINITOS

Son límites de la forma $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, es decir son funciones que crecen sin límite y decrecen sin límite

$$6. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^3-5x+2}{6+5x-6x^2} \right)$$

Solución: Factorizando en numerador y denominador:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^3 - 5x + 2}{6 + 5x - 6x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3(3 - 5/x^2 + 2/x^3)}{x^2(6/x^2 + 5/x - 6)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(3 - 5/x^2 + 2/x^3)}{x^2(6/x^2 + 5/x - 6)}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^3 - 5x + 2}{6 + 5x - 6x^2} \right) = \frac{+\infty(3 - 0)}{0 + 0 - 6} = \frac{+\infty}{-6} = -\infty$$

7. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - x)$

Solución: Racionalizando se tiene:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(x^2 + 1 - x^2)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{(|x|\sqrt{1 + 1/x^2}) + x}$$

Dado que x toma valores muy grandes negativamente $|x| = -x$, por lo que resulta:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-x\sqrt{1 + 1/x^2} + x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-\sqrt{1 + 1/x^2} + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-\sqrt{1 + 1/x^2} + 1} = \frac{1}{-\sqrt{1 + 0^+} + 1} \\ &= \frac{1}{0^-} = -\infty \end{aligned}$$

8. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x(x+6)}{4+(x-1)}$

Solución:
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x(x+6)}{4+(x-1)} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2(1+6/x)}{x(1+3/x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x(1+6/x)}{1+3/x} \\ &= \frac{+\infty(1+0)}{1+0} = +\infty \end{aligned}$$

7. LÍMITES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICOS.

7.1. Propiedades de los límites exponenciales y logarítmicos.

(1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ (2) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e$

(3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$ (4) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+ax)^{1/x} = e^a$

(5) Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ con $f(x) \neq 0$, para $x \neq a \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} [1 + f(x)]^{1/f(x)} = e$

(6) Si $a > 0 \wedge a \neq 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x - 1}{x} \right) = \ln(a)$

(7) Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, $L > 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} [\ln f(x)] = \ln \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right] = \ln L$

(8) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+x)}{x} \right) = 1$

7.2. Límites de la forma: $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = L$

Al evaluar estos límites, se deben tener en cuenta los siguientes casos:

Caso 1. Si existen los límites finitos

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \wedge \lim_{x \rightarrow a} g(x) = B \Rightarrow L = A^B$$

Caso 2. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \neq 1 \wedge \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty \Rightarrow L = A^{\pm\infty}$

(i) Si $A > 1 \Rightarrow L = A^{+\infty} = +\infty \wedge L = A^{-\infty} = 0$

(ii) Si $0 < A < 1 \Rightarrow L = A^{+\infty} = 0 \wedge L = A^{-\infty} = +\infty$

Caso 3. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1 \wedge \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty \Rightarrow L = 1^{\pm\infty}$

El problema se resuelve suponiendo que $f(x) = 1 + h(x)$, donde $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = 0$.

$$\text{Entonces: } L = \lim_{x \rightarrow a} \left\{ [1 + h(x)]^{\frac{1}{h(x)}} \right\}^{h(x).g(x)} = e^u, \text{ donde:}$$

$$u = \lim_{x \rightarrow a} h(x).g(x) = \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - 1].g(x)$$

EJEMPLOS ILUSTRATIVOS

1. Calcular: $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2} \right)^{\frac{2x-5}{8-3x}}$

Solución: Tome: $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2} \wedge g(x) = \frac{2x-5}{8-3x}$

Si $A = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \Rightarrow A = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)(x-2)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x+2}{x-1} \right) = 4$

$B = \lim_{x \rightarrow 2} g(x) \Rightarrow B = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2x-5}{8-3x} \right) = -\frac{1}{2}$

Como A y B son finitos, tenemos el **Caso 1**, por lo que

$$L = A^B = 4^{-1/2} = 1/2$$

2. Calcular: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + x - 3}{3x^2 + 2} \right)^{2x+3}$

Solución: Tome $f(x) = \frac{x^2 + x - 3}{3x^2 + 2} \wedge g(x) = 2x + 3$

Si $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \Rightarrow A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + x - 3}{3x^2 + 2} \right) = \frac{1}{3}$

$B = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \Rightarrow B = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + 3) = +\infty$

Tenemos el **Caso 2**, donde $0 < A < 1$ y $B = +\infty$

$$\therefore L = (1/3)^{+\infty} = 0 \quad 1/4 \cdot 1/2 \cdot 3/4$$

3. Calcular: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x+3} \right)^{x+2}$

Solución: Por el cálculo directo obtenemos la forma indeterminada $1^{+\infty}$, tenemos el **Caso 3**, entonces:

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x+3} \right)^{x+2} = e^u$$

Para determinar “u”, tome:

- $f(x) = 1 + h(x) \Rightarrow h(x) = f(x) - 1 = \frac{x-1}{x+3} - 1 = -\frac{4}{x+3}$
- $u = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{4}{x+3} \right) (x+2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-4x-8}{x+3} \right) = -4$

Por lo tanto $L = e^{-4}$

4. Calcular: $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + a \operatorname{Sen} bx)^{1/x}$

Solución: Al sustituir $x = 0$, el límite toma la forma indeterminada $1^{+\infty}$, tenemos el **Caso 3**, entonces:

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + a \operatorname{Sen} bx)^{1/x} = e^u$$

Para determinar “u”, tome:

- $h(x) = f(x) - 1 = \cos x + a \operatorname{Sen} bx - 1 = a \operatorname{Sen} bx - (1 - \cos x)$
 - $u = \lim_{x \rightarrow 0} h(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a \operatorname{Sen} bx - (1 - \cos x)}{x} \right)$
- $$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a \operatorname{Sen} bx}{x} \right) - \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} ab \left(\frac{\operatorname{Sen} bx}{bx} \right) - 0 = ab$$

Por lo tanto $L = e^{ab}$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x - 1}{x} \right)$

Solución: Hacemos un cambio de variable, para este caso.

Sea $t = a^x - 1 \Rightarrow a^x = 1 + t$, aplicando logaritmo natural se tiene:

$$\ln a^x = \ln(1+t) \Rightarrow x \ln a = \ln(1+t) \Rightarrow x = \frac{\ln(1+t)}{\ln a}$$

$$\text{Luego: } L = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x - 1}{x} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{t}{\frac{\ln(1+t)}{\ln a}} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{t \ln a}{\ln(1+t)} \right)$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\ln a}{\ln(1+t)^{1/t}} \right) = \frac{\ln a}{\ln e} = \ln a$$

$$6. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{ax} - e^{bx}}{x} \right)$$

Solución: Sumando y restando 1 en el numerador, se tiene:

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(e^{ax} - 1) - (e^{bx} - 1)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{ax} - 1}{x} \right) - \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{bx} - 1}{x} \right)$$

$$= \underbrace{a \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{ax} - 1}{ax} \right)}_{\ln e} - \underbrace{b \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{bx} - 1}{bx} \right)}_{\ln e} = a \ln e - b \ln e = a - b$$

$$7. \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^2}$$

Solución: Por el **Caso 3**, $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^2} = e^u$

Para determinar “u”, tome:

- $h(x) = f(x) - 1 = \cos x - 1 = -(1 - \cos x)$
- $u = \lim_{x \rightarrow 0} h(x) \cdot g(x) = - \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos x}{x^2} \right) = -\frac{1}{2}$

$$\text{Por lo tanto } L = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{ax} \right) \ln \sqrt[3]{\frac{1+ax}{1-ax}}$ Soluci

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{ax} \right) \ln \sqrt[3]{\frac{1+ax}{1-ax}} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln \left(\frac{1+ax}{1-ax} \right)^{\frac{1}{3ax}} = \ln \left[\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+ax}{1-ax} \right)^{\frac{1}{3ax}} \right]$$

El límite del

corchete tiene la forma 1^∞

Entonces:
$$L = \ln \left[\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+ax}{1-ax} \right)^{\frac{1}{3ax}} \right] = \ln e^u = u \ln e = u$$

Para determinar “u”, tome:

- $$h(x) = f(x) - 1 = \frac{1+ax}{1-ax} - 1 = \frac{2ax}{1-ax}$$
- $$u = \lim_{x \rightarrow 0} h(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2ax}{1-ax} \right) \left(\frac{1}{3ax} \right) = \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1-ax} \right) = \frac{2}{3}$$

Por lo tanto: $L = 2/3$

9. $\lim_{x \rightarrow \pi/4} (Tg x)^{Tg 2x}$

Solución: El límite tiene la forma 1^∞ , luego:

$$L = \lim_{x \rightarrow \pi/4} (Tg x)^{Tg 2x} = e^u$$

Para determinar “u”, tome:

- $$h(x) = f(x) - 1 = Tg x - 1$$
- $$u = \lim_{x \rightarrow \pi/4} h(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow \pi/4} (Tg x - 1) Tg 2x \Rightarrow$$

$$u = \lim_{x \rightarrow \pi/4} (Tg x - 1) \left(\frac{2Tg x}{1 - Tg^2 x} \right) = - \lim_{x \rightarrow \pi/4} \left(\frac{2Tg x}{1 + Tg x} \right) = - \frac{2}{1+1} = -1$$

Por lo tanto: $L = e^{-1} = \frac{1}{e}$

10.
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x e^x)}{\ln(x + \sqrt{1 + x^2})}$$

Solución: Dividiendo el numerador y denominador entre "x", se tiene

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1 + x e^x)}{x}}{\frac{\ln(x + \sqrt{1 + x^2})}{x}}$$

(i)
$$L_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x e^x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^x \left(\frac{\ln(1 + x e^x)}{x e^x} \right) = e^0(1) = 1$$

(ii)
$$L_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + \sqrt{1 + x^2})}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x + \sqrt{1 + x^2})^{1/x}$$

$$L_2 = \ln \left[\lim_{x \rightarrow 0} (x + \sqrt{1 + x^2})^{1/x} \right] \Rightarrow L_2 = \ln(e^u) = u$$

Aquí, L_2 tiene la forma indeterminada 1^∞ (Caso 3), tome:

- $$h(x) = f(x) - 1 = x + \sqrt{1 + x^2} - 1$$

- $$u = \lim_{x \rightarrow 0} h(x).g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sqrt{1 + x^2} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{x} \right)$$

$$\Rightarrow u = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1 + x^2} + 1} \right) = 1 + 0 = 1$$

Por lo tanto:
$$L = \frac{L_1}{L_2} = \frac{1}{1} = 1$$

11.
$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\cos \sqrt{5a/x})^{bx}$$

Solución: Cambiando variable: Sea $z = \sqrt{\frac{5a}{x}} \Rightarrow x = \frac{5a}{z^2}$, si $x \rightarrow \infty \Rightarrow z \rightarrow 0$, luego:

$$L = \lim_{z \rightarrow 0} (\cos z)^{5ab/z^2} = e^u$$

La sustitución directa da al límite la forma indeterminada 1^∞ (Caso 3), tome:

- $h(z) = f(z) - 1 = \cos z - 1 = -(1 - \cos z)$
 - $u = \lim_{z \rightarrow 0} h(z) \cdot g(z) = -\lim_{z \rightarrow 0} (1 - \cos z) \left(\frac{5ab}{z^2} \right) = -5ab \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos z}{z^2} \right)$
- $$\Rightarrow u = -5ab \left(\frac{1}{2} \right) = -\frac{5ab}{2}$$

Por lo tanto: $L = e^{-5ab/2}$

12. $\lim_{x \rightarrow \infty} x [\ln(x+1) - \ln x]$

Solución: $L = \lim_{x \rightarrow \infty} x [\ln(x+1) - \ln x] = \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(\frac{x+1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{x+1}{x} \right)^x$

$$\Rightarrow L = \ln \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x \right] = \ln e = 1$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

I. Use la definición para demostrar que el límite es el número indicado, determinar los números $\delta > 0$ para los valores de ε dados

1. $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3x + 5) = 3; \varepsilon = 0,04$

2. $\lim_{x \rightarrow -3} (2x^2 - 1) = 17; \varepsilon = 0,02$

3. $\lim_{x \rightarrow -2} (4x^2 + x - 4) = 10; \varepsilon = 0,033$

4. $\lim_{x \rightarrow 3} (7x + 2) = 23; \varepsilon = 0,07$

5. $\lim_{x \rightarrow 1/3} \left(\frac{9x^2 - 1}{3x - 1} \right) = 2; \varepsilon = 0,027$

6. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \right) = \frac{1}{2}; \varepsilon = 0,013$

$$7. \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2x^2 - x - 6}{3x^2 - 8x + 4} \right) = \frac{7}{4}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{x^2 - 4}{x^3 + 8} \right) = -\frac{1}{3}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x+4}{3x-1} \right) = \frac{5}{2}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 1/3} \left(\frac{3x+1}{6x-3} \right) = -2$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{2x^2 - 5x + 2} \right) = -1$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 1} (2\sqrt{x} + 5) = 7$$

$$13. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x - \sqrt{2}}{2x + \sqrt{3}} \right) = -\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$14. \lim_{x \rightarrow 3} (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = 8$$

$$15. \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{1}{2 + \sqrt{x}} \right) = \frac{1}{4}$$

$$16. \lim_{x \rightarrow -2} (x^3 + 6x^2 - x - 19) = -1$$

$$17. \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{5-3x}{5x+7} \right) = 4$$

$$18. \lim_{x \rightarrow 7} \left(\frac{x+1}{9x-60} \right) = \frac{8}{3}$$

II. Calcular los siguientes límites:

$$1. \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{\sqrt[3]{9x-3}}{\sqrt{3x-3}} \right)$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt[4]{1+x^4}}{x^2} \right)$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{\sqrt[4]{x+1} - 1}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{6\sqrt[3]{x+6} - 4\sqrt{x+7}}{x^2 - 4}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[5]{x^2} - \sqrt[3]{x}}{1 - \sqrt[4]{x}}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{5-x}}{1 - \sqrt{5-x}}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt{x} - 8}{\sqrt[3]{x} - 4}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt{x} - 3}{x - 1}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{4x+5} - \sqrt{3x+13}}{x-1}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{5x-2} - \sqrt[3]{x+6}}{x^2 - 4}$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^3+8} - \sqrt{x^2+4}}{x^2}$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x^2+4} - \sqrt[4]{x^2+6x}}{x^2 - 4}$$

$$13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$$

$$14. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{3x+5} + x + 3}{\sqrt[3]{x+1} + 1}$$

$$15. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x-1} - x + \sqrt{x^2-3}}{\sqrt{3x+10} - 4}$$

$$16. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{3 - \sqrt{2x+1}}$$

$$17. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}$$

$$18. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+7} - 2}{\sqrt{x+7} - \sqrt{8}}$$

III. Hallar los límites indicados, si existen; trazar la gráfica correspondiente

$$1. \quad f(x) = \begin{cases} 2x+3 & , \text{ si } x < 1 \\ 2 & , \text{ si } x = 1 \\ 7-2x & , \text{ si } x > 1 \end{cases} ; \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

$$2. \quad f(x) = \begin{cases} 2x+7 & , \text{ si } x < -1 \\ 3-2x & , \text{ si } -1 \leq x \leq 2 \\ x^2-3x+1 & , \text{ si } x > 2 \end{cases} ; \quad \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

$$3. \quad f(x) = \begin{cases} 6x-2x^2 & , \text{ si } x < 2 \\ 6 & , \text{ si } x = 2 \\ 2x^2-x-2 & , \text{ si } x > 2 \end{cases} ; \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

$$4. \quad f(x) = x\sqrt{\frac{1}{4x^2}-16} ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

$$5. \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & , \text{ si } x < 1 \\ x & , \text{ si } 1 < x < 4 \\ 4-x & , \text{ si } x > 4 \end{cases} ; \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 4} f(x)$$

$$6. \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x-5}{1-\sqrt{x-4}} & , \text{ si } x \geq 5 \\ \frac{x^2-12x+35}{x-5} & , \text{ si } x < 5 \end{cases} ; \quad \lim_{x \rightarrow 5} f(x)$$

$$7. \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-2x^2-5x+6}{x-3} & , \text{ si } x < 3 \\ \frac{\sqrt{x+1}-1}{x+2} & , \text{ si } x \geq 3 \end{cases} ; \quad \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$$

IV. Evaluar los siguientes límites al infinito

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^2 - 2}{2x + 1} + \frac{x^2 - 4x}{x - 3} \right)$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{x + 7}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{x + 7}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 5x + 6} - x)$$

$$5. \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 2x + 4} + x)$$

$$6. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - x)$$

$$7. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 9})$$

$$8. \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt[3]{x^2 - x^3 + 1})$$

$$9. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{2x^2 - 1} - \frac{x^2}{2x + 1} \right)$$

$$10. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x + 1}}$$

$$11. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 3x}}{2x + 6}$$

$$12. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 + 4x}{\sqrt[3]{27x^2 - 8x^3}}$$

$$13. \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt[3]{2x^2 - x^3})$$

$$14. \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} + x)$$

$$15. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 2x - 1} - \sqrt{x^2 - 7x + 2})$$

$$16. \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 + 2x} - 2\sqrt{x^2 + x} + x)$$

$$17. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^3 + 5x^2 - 4}{x^2 + x - 1} - \sqrt{9x^2 + 2x + 3} \right)$$

V. Evaluar los siguientes límites trigonométricos:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x - \text{Sen } 2x}{2x + 3\text{Sen } 4x}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Cos}(mx) - \text{Cos}(nx)}{x^2}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \text{Cos } 6x}{\text{Sen } 6x}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \text{Sen } x - \text{Cos } x}{1 - \text{Sen } x - \text{Cos } x}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + S\text{Cos } \pi x}{x^2 - 2x + 1}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\text{Sen}(\pi - x)}{x(\pi - x)}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{1 - 2\cos x}{\pi - 3x}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{1 - \cos 4x}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow b} \frac{b \operatorname{Sen} x - x \operatorname{Sen} b}{b \cos x - x \cos b}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{Tg(1 + \cos x)}{\cos(Tg x) - 1}$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{Sen} 3\pi x + \cos \pi x + 1}{x^2 - 1}$$

$$12. \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1 - \cos(1 - \operatorname{Sen} x)}{(\pi/2 - x)^4}$$

$$13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Sen} 7x - \operatorname{Sen} 3x}{x \cos x}$$

$$14. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\operatorname{Sen} \pi x}{3 - x}$$

$$15. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\operatorname{Sen}(x^2 - 10x + 25)}{x^3 + 5x^2 - 125x + 375}$$

$$16. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{18x^2}{1 - \sqrt{\cos(\pi x)}}$$

$$17. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\operatorname{arc} \operatorname{Sen}(x - 2)}{x^2 - 2x}$$

$$18. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{arc} \operatorname{Sen}(3x) \sqrt{Tg x}}{x \sqrt{\operatorname{Cosec} x - \operatorname{Ctg} x}}$$

VI. Evaluar los siguientes límites infinitos.

$$1. \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x^3 + 1}{2 - x - x^2}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x^3 + 1}{2 - x - x^2}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{\sqrt[3]{15 - x^2}}{x - 4}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{\sqrt{16 - x^2}}{x - 4}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^3 - 2x + 1}{5x^2 - 3}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 + 8x^2 + 7}{x^2 - x}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3x^2 - 2x - 9}{4 - x^2}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 5x - 2}{9 - x^2}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 3^-} \left(\frac{1}{x+3} - \frac{x}{x^2-9} \right)$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{Sen}(x-1)}{x(x-1)^2}$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3x^2 - 7x + 6}{x^2 - x - 6}$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^3 + 9x^2 + 20x}{x^2 + x - 12}$$

$$13. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 5x - 3}{x - 1}$$

$$14. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 - 4x^3}{5x^2 + 3x^3}$$

$$15. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{x^2 - 2x - 1} \right)$$

$$16. \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x^2 - 4} \right)$$

$$17. \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{3x^2 - 7x + 6}{x^2 + x - 6}$$

$$18. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^3 + 2x^2 - 1}{2x^2 - 3x + 5}$$

VII. Evaluar los siguientes límites exponenciales y logarítmicos

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 + 3x^2 + 2x - 1}{x^3 + 2x - 5} \right)^{x+1}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 + 3x^2 + 2x - 1}{x^3 + 2x - 5} \right)^{x+1}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\text{Sen} x + \text{Sen} 3x}{\text{Sen} x - \text{Sen} 3x} \right)^{\frac{1}{\text{Sen} 3x}}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\sqrt{2 - \sqrt{\cos x}} \right)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(\sqrt[3]{\cos(ax)})}{bx^2} \right)$$

$$6. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\cos \sqrt{\frac{3a}{x}} \right)^{4x}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 + 2x + 3}{x^3 + 4} \right)^{x^2+2}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^4 + 3x^2 + 2x + 1}{2x^4 + 5x + 4} \right)^{\sqrt{x^2 - 3x - 1}}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 3}{x^2 + 4x} \right)^{\frac{x^2 - 1}{x}}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+x)}{x} \right)$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1}{x} \right)$$

$$13. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{7^x - 1}{x} \right)$$

$$14. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{7^x - 5^x}{x} \right)$$

$$15. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{9^x - 7^x}{8^x - 6^x} \right)$$

$$16. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\text{Sen} 3x - \text{Sen} x}{\ln(1+x)} \right)$$

$$17. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{ax} - e^{bx}}{x} \right)$$

$$18. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)^{\frac{x-1}{x+1}}$$

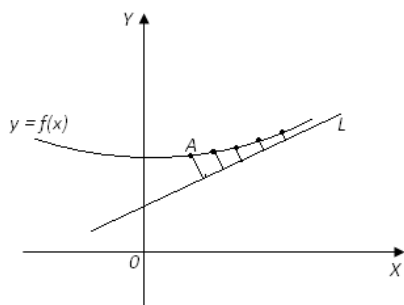
$$19. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 3} \right)^{x^2}$$

$$20. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5 + x + x^2}{2 + x^2} \right)^{2x}$$

8. ASINTOTAS DE UNA CURVA.

8.1. Definición. Consideremos una recta L y un punto A que se desliza a lo largo de una curva $C : y = f(x)$, cuando la distancia entre la recta L y el punto A de la curva tiende a cero, cuando el punto A tiende al infinito, entonces a la recta L se denomina asíntota de la curva es decir:

$$\lim_{A \rightarrow \infty} d(L, A) = 0$$



8.2. Definición. La recta $x = a$ es una asíntota vertical de la curva $C : y = f(x)$ si se cumple una de las relaciones siguientes:

$$(i) \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm \infty \quad (ii) \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm \infty \quad (iii) \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm \infty$$

8.3. Definición. La recta $y = k$ es una asíntota horizontal de la curva $C : y = f(x)$ si se cumple una de las relaciones siguientes:

$$(i) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = k \quad (ii) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = k \quad (iii) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = k$$

8.4. Definición. La recta $y = mx + b$ es una asíntota oblicua de la curva $C : y = f(x)$ si se cumple que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0 \quad \text{ó} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$$

Observación: La forma práctica de encontrar las asíntotas oblicuas u horizontales de una curva $y = f(x)$ es de la manera siguiente:

$$\text{Si existen los límites } \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x} = m; \quad \lim_{x \rightarrow \pm \infty} [f(x) - mx] = b$$

La recta $y = mx + b$ es una asíntota oblicua (a la derecha cuando $x \rightarrow +\infty$; y a la izquierda cuando $x \rightarrow -\infty$) y es una asíntota horizontal cuando $m = 0$

Ejemplos ilustrativos

1. Determinar las asíntotas de la curva C: $y(x-3) = x^2 + 9$

Solución:

(a) **Asíntotas verticales.** Si $y(x-3) = x^2 + 9 \Rightarrow y = \frac{x^2 + 9}{x-3}$, como el denominador se anula para $x = 3$, entonces:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 9}{x-3} = \pm\infty, \text{ entonces la recta } x = 3 \text{ es una asíntota vertical}$$

(b) **Asíntota oblicuas u horizontales:**

$$\bullet \quad m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 9}{x(x-3)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 9}{x^2 - 3x} = 1 \Rightarrow m = 1$$

$$\bullet \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y - mx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 9}{x-3} - x = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 9 - x^2 + 3x}{x-3}$$

$$\Rightarrow b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x + 9}{x-3} = 3 \Rightarrow b = 3$$

Luego como $m \neq 0$, la asíntota oblicua es la recta: $y = x + 3$

2. Determinar las asíntotas de la curva C: $y = \frac{x^2 + 3}{\sqrt{x^2 - 4}}$

Solución:

(a) **Asíntotas verticales.** Si $y = \frac{x^2 + 3}{\sqrt{x^2 - 4}}$, observamos que el denominador se anula para $x = \pm 2$

y además $\lim_{x \rightarrow \pm 2} \frac{x^2 + 3}{\sqrt{x^2 - 4}} = +\infty$, entonces se tiene que las rectas $x = \pm 2$ son las asíntotas verticales.

(b) Asíntotas oblicuas u horizontales.

$$\bullet \quad m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 3}{x\sqrt{x^2 - 4}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2(1 + 3/x^2)}{x\sqrt{x^2(1 - 4/x^2)}}$$

$$\Rightarrow m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2(1 + 3/x^2)}{x^2\sqrt{1 - 4/x^2}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(1 + 3/x^2)}{\sqrt{1 - 4/x^2}} = \pm 1$$

$$\bullet \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y - mx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2 + 3}{\sqrt{x^2 - 4}} \pm x \right) = 0, \Rightarrow b = 0$$

Luego las asíntotas oblicuas son: $y = x$; $y = -x$

3. Determinar las asíntotas de la curva C: $y = \frac{2x^2 - 5x - 3}{x - 1}$

Solución:

(a) Asíntotas verticales. Si $y = \frac{2x^2 - 5x - 3}{x - 1}$, el denominador se anula para $x = 1$ y además

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 5x - 3}{x - 1} = \infty, \text{ entonces la asíntota vertical es la recta } x = 1$$

(b) Asíntotas oblicuas u horizontales.

$$\bullet \quad m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 - 5x - 3}{x^2 - x} = 2 \Rightarrow m = 2$$

$$\bullet \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y - mx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{2x^2 - 5x - 3}{x - 1} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-3x - 3}{x - 1} = -3$$

Por lo tanto la asíntota oblicua es la recta $y = 2x - 3$

4. Determinar las asíntotas de la curva C: $y = \sqrt{\frac{x^3}{x - 2}}$

Solución: (a) Asíntotas verticales. Si $y = \sqrt{\frac{x^3}{x - 2}} \Rightarrow y = |x| \sqrt{\frac{x}{x - 2}}$, el denominador se

anula para $x = 2$, y $\lim_{x \rightarrow 2^+} |x| \sqrt{\frac{x}{x - 2}} = 2 \sqrt{\frac{2}{0^+}} = +\infty$

Por lo tanto, la recta $x = 2$ es asíntota vertical

(b) Asíntotas oblicuas u horizontales.

$$* m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x}{x} \sqrt{\frac{x}{x-2}} \right) = \pm 1 \Rightarrow m = \pm 1$$

$$* b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y - mx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(x \sqrt{\frac{x}{x-2}} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{\sqrt{x-2} (\sqrt{x} + \sqrt{x-2})} = \pm 1$$

Por lo tanto las rectas $y = x + 1$ y $y = -x - 1$, son asíntotas oblicuas

5. Determinar las asíntotas de la curva C: $y = \frac{x^3}{x^2 + x - 2}$

Solución:

(a) Asíntotas verticales. Si $y = \frac{x^3}{x^2 + x - 2} = \frac{x^3}{(x+2)(x-1)}$, el denominador se anula para $x = -2$ y $x = 1$, luego evaluamos:

$$* \lim_{x \rightarrow -2^\pm} \frac{x^3}{(x+2)(x-1)} = \frac{-8}{0^\mp} = \pm\infty$$

$$* \lim_{x \rightarrow 1^\pm} \frac{x^3}{(x+2)(x-1)} = \frac{1}{0^\pm} = \pm\infty$$

Por tanto las rectas $x = -2$ y $x = 1$ son las asíntotas verticales

(b) Asíntotas oblicuas u horizontales.

$$* m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2}{x^2 + x - 2} \right) = 1 \Rightarrow m = 1$$

$$* b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y - mx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 + x - 2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{-x^2 + 2x}{x^2 + x - 2} \right) = -1$$

Por tanto, la recta $y = x - 1$ es una asíntota oblicua

6. Determinar las asíntotas de la curva C: $y = \frac{2x^2 + 5x - 8}{x + 3}$

Solución:

(a) Asíntotas verticales. Si $y = \frac{2x^2 + 5x - 8}{x + 3}$, $x = -3$, es posible asíntota vertical, en efecto:

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 5x - 8}{x + 3} = \infty, \text{ entonces } x = -3 \text{ es } A_v$$

(b) Asíntotas oblicuas u horizontales.

$$* m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{2x^2 + 5x - 8}{x^2 + 3x} \right) = 2 \Rightarrow m = 2$$

$$* b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y - mx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{2x^2 + 5x - 8}{x + 3} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{-x - 8}{x + 3} \right) = -1$$

Por tanto, la recta $y = 2x - 1$ es una asíntota oblicua

EJERCICIOS PROPUESTOS

Determinar las asíntotas para las siguientes curvas $y = f(x)$

1. $y = \frac{2x^2 - 5x - 3}{x - 1}$

2. $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 - 9x + 27}$

3. $y = \frac{1 - x^2}{x^2 - 4}$

4. $y = \frac{x - 5}{x^2 - 7x + 10}$

5. $y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$

6. $y = \sqrt[4]{x^4 - x^3 - 9x^2 + 9x}$

7. $y = \sqrt[4]{x^4 - 3x^3 - 9x^2 + 36x}$

8. $y = \sqrt{4x^2 + 2x + 1}$

9. $y(x - 3)^2 = x^2 + 9$

10. $xy^2 - 3y^2 - 4x = 8$

11. $y = \frac{x - 5}{x^2 - 7x + 10}$

12. $y = \frac{x^2 + 2x + 1}{x}$

$$13. y = \sqrt{\frac{9x^2 - 6x - 8}{16x^2 + 4x - 6}}$$

$$14. y = \sqrt{\frac{16x^2 + 4x - 6}{9x^2 - 6x - 8}}$$

9. CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN

9.1. Continuidad de una función en un punto. Consideremos una función real de variable real $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, diremos que la función f es continua en el punto $x = x_0$, si y sólo si, se cumplen las tres condiciones siguientes:

(i) Existe $f(x_0)$, es decir $x_0 \in D_f$

(ii) Existe $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

(iii) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Observación: Cuando una de las tres condiciones no se cumple, se dice que la función es discontinua en el punto $x = x_0$

9.2. Propiedades sobre continuidad.

a) Consideremos dos funciones f y g continuas en $x = x_0$, entonces:

♦ $f \pm g$ es continua en el punto $x = x_0$

♦ kf es continua en el punto $x = x_0$, $k \in \mathbb{R}$

♦ $f \cdot g$ es continua en el punto $x = x_0$

b) Las funciones polinómicas son continuas pues: $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$

c) Las funciones racionales, o sea los cocientes de polinomios, son continuas, pues

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}; \quad \text{si } Q(x_0) \neq 0$$

9.3. Tipos de discontinuidad

(a) Discontinuidad evitable o removible. Diremos que una función real $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tiene una discontinuidad evitable o removible en un punto $x = x_0$ si:

(i) Existe el número $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

(ii) Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$; para $x_0 \notin D_f \vee x_0 \in D_f$, en este caso definimos la función

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \neq x_0 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x); & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

(b) Discontinuidad no evitable o irremovible(esencial)

b.1 Discontinuidad de primera especie. Diremos que la función $f(x)$ tiene una discontinuidad de primera especie si existen los límites laterales $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$, finitos y diferentes

b.2. Discontinuidad de segunda especie. Diremos que la función $f(x)$ tiene una discontinuidad de segunda especie en el punto x_0 si no existen $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, o si uno de los límites laterales es

$\pm \infty$

Ejemplos ilustrativos. Analizar la continuidad de las siguientes funciones

$$1. \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x - 1}, & \text{si } x \in (-1, 2) \\ 3, & \text{si } x = 1 \end{cases}.$$

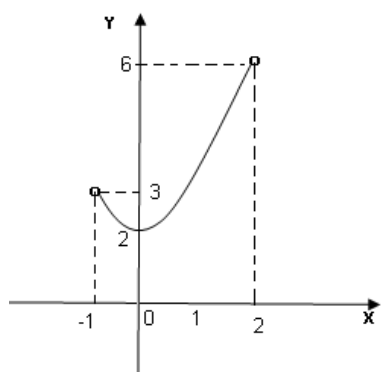
Solución: Si $x \in (1, 2)$; $f(x) = \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x - 1} = x^2 + 2$; $x \neq 1$

Veamos si para $x = 1$ se cumplen las condiciones de la definición 8.1

(i) $f(1) = 3$, existe por definición

(ii) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2) = 1 + 2 = 3$

(iii) De (i) y (ii) se sigue que: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$



$$2. \quad f(x) = \begin{cases} x^2 - 3, & \text{si } -1 < x < 1 \\ 2x - 4, & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 5 - x^2, & \text{si } 2 \leq x < 3 \end{cases},$$

Solución: Siendo f una función seccionada, los posibles puntos de continuidad se presentan en la unión de los intervalos de definición, esto es, en $x = 1$ y $x = 2$

Analicemos la continuidad en cada caso

(a) Continuidad en $x = 1$

(i) $f(1) = 2(1) - 4 = -2$

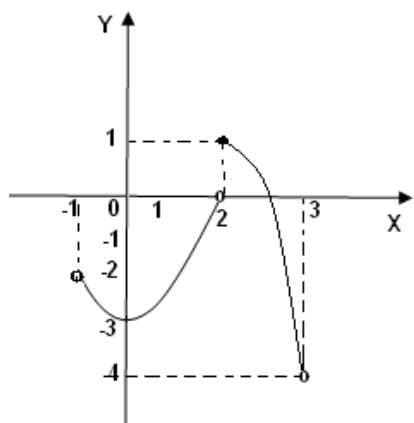
(ii) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - 3) = -2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x - 4) = -2 \end{cases}; \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -2$

(iii) De (i) y (ii) se tiene $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = -2$, por lo tanto la función es continua en $x = 1$

(b) Continuidad en $x = 2$

(i) $f(2) = 5 - 2^2 = 1$

(ii) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} (2x - 4) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} (5 - x^2) = 1 \end{cases}; \Rightarrow \text{no existe } \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$



Por lo tanto, como no se cumple la condición (ii) la función no es continua en $x = 2$

3.
$$f(x) = \begin{cases} |x^2 - 4|, & \text{si } x \neq \pm 2 \\ 3, & \text{si } x = \pm 2 \end{cases}$$

Solución: Al eliminar las barras del valor absoluto obtenemos

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & \text{si } x < -2 \vee x > 2 \\ 4 - x^2, & \text{si } -2 < x < 2 \\ 3, & \text{si } x = \pm 2 \end{cases}$$

(a) Continuidad en $x = -2$

(i) $f(-2) = 3$, existe por definición

(ii)
$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2^-} (x^2 - 4) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} (4 - x^2) = 0 \end{cases}; \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 0$$

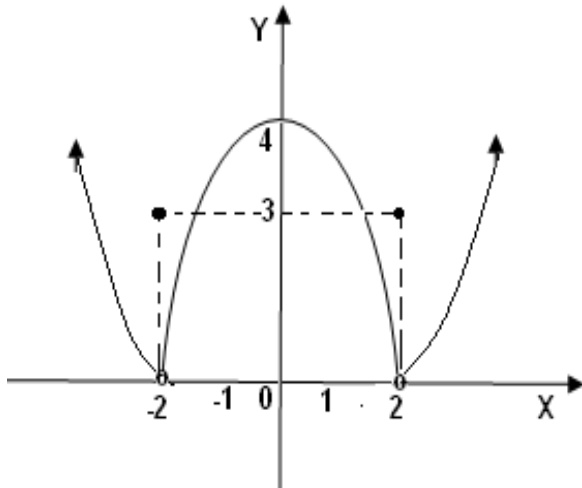
(iii) Como $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) \neq f(-2)$, la función es discontinua en $x = -2$

(b) Continuidad en $x = 2$

(i) $f(2) = 3$, existe por definición

$$(ii) \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - 4) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} (4 - x^2) = 0 \end{cases}; \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$$

Por lo tanto: Como $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq f(2)$, la función es discontinua en $x = 2$



$$4. \quad f(x) = \begin{cases} 2x+3, & \text{si } x \leq 1 \\ 8-3x, & \text{si } 1 < x < 3 \\ x+3, & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

Solución:

$$(i) \quad f(1) = 5; \quad f(3) = 6, \text{ existen}$$

$$(ii) \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x+3) = 5 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} (8-3x) = 5 \end{cases}; \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} (8-3x) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} (x+3) = 6 \end{cases}; \Rightarrow \text{no existe } \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$$

Por lo tanto la función es continua en $x = 1$ y discontinua en $x = 3$

5. Analizar la continuidad o discontinuidad de la función:

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - 11x + 12}{x^2 - 5x + 4}$$

Solución: Primeramente simplificamos

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - 11x + 12}{x^2 - 5x + 4} = \frac{(x-4)(x-1)(x+3)}{(x-4)(x-1)} = x+3; x \neq 1; 4$$

Luego la función $f(x)$ tiene puntos de discontinuidad evitable en los puntos $x = 1$; $x = 4$

Ahora definiremos la función de tal manera que sea continua en todo x .

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x+3 = 1+3 = 4; \quad \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x+3 = 4+3 = 7$$

$$F(x) = \begin{cases} x+3, & \text{para } x \neq 1, 4 \\ 4, & \text{para } x = 1 \\ 7 & \text{para } x = 4 \end{cases}$$

6. Determinar el tipo de discontinuidad de la función:

$$f(x) = \frac{6x+24}{x^2+3x-4}$$

Solución: Para hallar los puntos de discontinuidad de la función, es necesario determinar los valores de " x " para los cuales f no está definida. En este caso son los valores que anulan el denominador. $x^2+3x-3=(x+4)(x-1)$, luego f no está definida en $x = 1$ y $x = -4$.

Para determinar el tipo de discontinuidad, es necesario averiguar acerca de los límites en esos puntos, o sea:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6(x+4)}{(x+4)(x-1)} = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow -4} f(x) = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{6(x+4)}{(x+4)(x-1)} = -\frac{6}{5}$$

La discontinuidad en $x = -4$ es evitable y la discontinuidad en $x = 1$ es esencial. En los demás valores de x , la función es continua.

Redefiniendo la función en $x = -4$ se tiene:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{6x+24}{x^2+3x-4}, & \text{para } x \neq 4 \\ -6/4, & \text{para } x = -4 \end{cases}$$

Que es continua en $x = -4$, mientras que la discontinuidad en $x = 1$ no puede evitarse.

$$7. \quad f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & \text{para } x \leq 0 \\ \frac{2\text{Sen}x}{x}, & \text{para } x > 0 \end{cases}$$

Solución:

$$(i) f(0) = 0^2 + 2 = 2$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + 2) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\text{Sen}x}{x} = 2 \end{cases}; \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 2$, entonces f es continua en $x = 0$

$$8. \quad f(x) = \begin{cases} 3 & , \text{ para } x = 2 \\ \frac{3x^2 - 7x + 2}{x - 2} & , \text{ para } x \neq 2 \end{cases}$$

Solución:

$$(i) f(2) = 3$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 7x + 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(3x - 1)(x - 2)}{(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} (3x - 1) = 5$$

Como $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq f(2)$, f no es continua en $x = 2$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Analizar la continuidad de las siguientes funciones.

$$1. \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} & , \text{ para } x > 2 \\ 2x & , \text{ para } x \leq 2 \end{cases}$$

$$2. \quad f(x) = \begin{cases} x - 2 & , \text{ para } x \geq 3 \\ x + 12x & , \text{ para } x < 3 \end{cases}$$

$$3. f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 + x + 1} \quad 4. f(x) = \frac{x^2 - 16}{x + 6 - 5\sqrt{x}} \quad 5. f(x) = \frac{9x^2 - 4}{3x - 2}$$

$$6. f(x) = \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} \quad 7. f(x) = \begin{cases} 2x - 3, & \text{si } x \leq 1 \\ x^2, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$8. f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x + 3} \quad 9. f(x) = \frac{x^2 - 3x - 4}{x - 4}$$

$$10. f(x) = \begin{cases} \frac{5}{x - 4}, & \text{si } x \neq 4 \\ 1, & \text{si } x = 4 \end{cases} \quad 11. f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x + 2}, & \text{si } x \neq -2 \\ 0, & \text{si } x = -2 \end{cases}$$

$$12. f(x) = \frac{(x - 1)(x^2 - x - 12)}{x^2 - 5x + 4} \quad 13. f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{(x - 1)(x^2 - x - 12)}$$

$$14. f(x) = \begin{cases} 1 + x, & \text{si } x \leq -2 \\ 2 - x, & \text{si } -2 < x \leq 2 \\ 2x - 1, & \text{si } x > 2 \end{cases} \quad 15. f(x) = \frac{x^2 - x - 12}{x^2 + 2x - 3}$$

$$16. f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 1, & \text{si } -1 < x \leq 2 \\ 2x - 6, & \text{si } 2 < x \leq 3 \\ -x^2 + 4x - 3, & \text{si } 3 < x \leq 5 \end{cases} \quad \text{Tome: } x_0 = 2 \text{ y } x_0 = 3$$

$$17. f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x - 1}, & \text{si } x \neq 1 \\ 4, & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

CAPITULO 02

APLICACIONES DE LA DERIVADA

CAPÍTULO 02

Aplicaciones De La Derivada

EJEMPLOS RESUELTOS

1) Un fabricante de cocinas desea vender un promedio de 1000 cocinas al mes a S/. 50 000. El fabricante piensa que puede vender 100 cocinas adicionales al mes por cada S/. 2000 de reducción en el precio ¿Cuál es el precio que produce mayor ingreso?

Solución:

n = Numero de reducciones.

$$p = (\text{Precio de cada cocina}) = 50000 - 2000n$$

$$x = (\text{Numero de cocinas vendidas}) = 1000 + 100n$$

$$I = R(x) = px = (50000 - 2000n)(1000 + 100n) = 50000000 + 5000000n - 2000000n - 200000n^2$$

$$I(x) = 50000000 + 3000000n - 200000n^2 = 200000(250 + 15n - n^2)$$

$$I'(x) = 200000(15 - 2n)$$

$$15 - 2n = 0 \Rightarrow n = 7,5$$

$$I'' = -400000 \Rightarrow I(x) < 0 \quad \forall x$$

$$\text{Precio } 50000 - 2000(7,5) = 35000$$

$$\text{Por lo tanto: } I(7,5) = 200000(250 + 15n - n^2) = 61250000 \text{ soles}$$

2) Una empresa de transportes, con una tarifa de S/.20, transporta 8000 pasajeros por día, al considerar un aumento en la tarifa la empresa determina que perderá 800 pasajeros por cada S/.5 de aumento en estas condiciones. ¿Cual debe ser el aumento para que el ingreso sea el máximo?

Solución:

Sea x el número de aumentos de S/.5 en la tarifa entonces $20 + 5x$ es la tarifa resultante y el numero de pasajeros será $8000 - 800x$

$$I = R(x) = px$$

$$I(x) = (20 + 5x)(8000 - 800x) \Rightarrow I(x) = 4000(40 + 6x - x^2)$$

$$I'(x) = \left[4000(40 + 6x - x^2) \right]' = 4000(6 - 2x)$$

Para hallar el número crítico

$$4000(6 - 2x) = 0 \\ \Rightarrow x = 3$$

$$I'' = -8000 \Rightarrow I(x) < 0 \quad \forall x$$

Luego $x = 3$ se tiene máximo. El aumento en el pasaje debe ser de $3 \times 5 = 15$

El precio sería $20 + 15 = S/.35$

3) El número de dólares del precio total de la manufactura de x relojes en cierta fábrica está

dada por $C(x) = 1500 + 30x + \frac{20}{x}$. Encontrar:

a) La función costo marginal.

b) El costo marginal cuando $x = 40$.

c) El costo de la manufactura del cuadragésimo primer reloj.

Solución:

a) La función costo marginal : $C'(x) = 30 - \frac{20}{x^2}$

b) El costo marginal cuando: $x = 40$ $C'(40) = 30 - \frac{20}{(40)^2} = 29,98$

c) El costo de la manufactura del cuadragésimo primer reloj:

$$C(41) - C(40) = 1500 + 30(41) + \frac{20}{41} - \left(1500 + 30(40) + \frac{20}{40} \right) = 2730,49 - 2700,5 = 29,99$$

4) Supóngase que un líquido se produce por cierto proceso químico y que la función del costo total $C(x)$ esta dado por $C(x) = 6 + 4\sqrt{x}$, donde $C(x)$ \$ es el costo total de la producción de x galones del líquido. Encontrar:

a) El costo marginal de cuando se producen 16 galones.

b) El número de gaones producidos cuando el costo marginal es de 40 centavos por galón.

Solución:

a) El costo marginal de cuando se producen 16 galones:

$$C'(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} \Rightarrow C'(16) = \frac{2}{\sqrt{16}} = \frac{2}{4} = 0,5$$

b) El número de gaones producidos cuando el costo marginal es de 40 centavos por galón:

$$0,40 = \frac{2}{\sqrt{x}} \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{2}{0,40} = 5 \Rightarrow x = 25$$

5) Suponiendo que la función precio esta dado por $P(x) = 24 - 8x$ y la función costo por $C(x) = 4x + 10^8$ supóngase además que el gobierno grava las ventas con un impuesto de $t\%$ por cada unidad.

a) Determinar en términos de t , la cantidad de producción que maximiza la utilidad.

b) Determinar el valor de t que maximiza la renta del gobierno por concepto de impuesto.

Solución:

a) Determinar en términos de t , la cantidad de producción que maximiza la utilidad:

Función ingreso	Función costo	Función utilidad
$I(x) = x P(x) = x(40 + 8x)$ $I(x) = 40x + 8x^2$	$C(x) = 4x + 10^8 + tx$	$U(x) = R(x) - C(x)$ $U(x) = 40x - 8x^2 - (4x + 10^8 + tx)$ $U(x) = -8x^2 + 36x - tx - 10^8$

$$U'(x) = -16x + 36 - t \Rightarrow -16x + 36 - t = 0 \Rightarrow x = \frac{36 - t}{16}$$

b) Determinar el valor de t que maximiza la renta del gobierno por concepto de impuesto:

$I_g(t) = xt = \left(\frac{36-t}{16}\right)t = \frac{36t-t^2}{16}$	$I'_g(t) = \frac{36-2t}{16} = 0$ $36 - 2t = 0$ $t = 18\%$
--	---

6) Si la función de costa total es $C(x) = 0,1x^2 + 5x + 200$. Determinar el costo promedio y costo marginal.

Solución:

$$\text{Costo promedio } \bar{c}(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{0,1x^2 + 5x + 200}{x} = 0,1x + 5 + \frac{200}{x}$$

$$\text{Costo marginal } C'(x) = 0,2x + 5$$

7) El número de soles del costo total de la producción de x unidades de una mercancía es $C(x) = x^2 + 4x + 8$. Encontrar:

- La ecuación que defina el costo promedio
- La ecuación del costo marginal y del costo promedio marginal
- Encontrar el mínimo absoluto del costo unitario promedio
- Trazar las curvas del costo total, del costo promedio y del costo marginal en el mismo sistema de coordenadas verificar que los costos promedios y marginales son iguales cuando el costo promedio tiene un valor mínimo.

Solución:

a) La ecuación que defina el costo promedio:

$$\bar{c}(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{x^2 + 4x + 8}{x} = x + 4 + \frac{8}{x}$$

b) La ecuación del costo marginal y del costo promedio marginal:

$$\text{Costo marginal } C'(x) = 2x + 4$$

Costo promedio marginal $\bar{c}'(x) = 1 - \frac{8}{x^2}$

c) Encontrar el mínimo absoluto del costo unitario promedio:

$\bar{c}'(x) = 1 - \frac{8}{x^2} = 0$ $x = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$	$\bar{c}''(x) = \frac{16}{x^3} \Rightarrow \bar{c}''(2\sqrt{2}) = \frac{16}{(2\sqrt{2})^3} > 0 \text{ es mínimo relativo}$
--	--

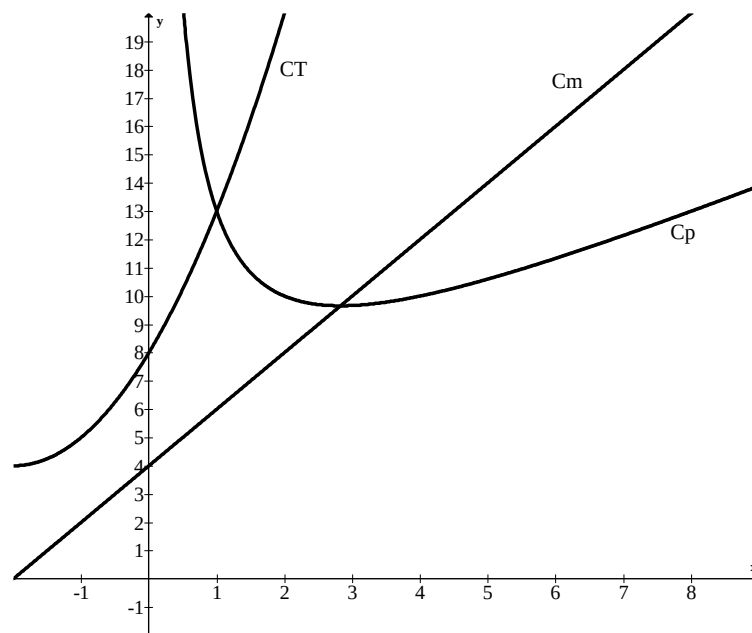
Por lo tanto

$$C(2\sqrt{2}) = (2\sqrt{2})^2 + 4(2\sqrt{2}) + 8 = 9,64$$

$$\bar{c}(2\sqrt{2}) = (2\sqrt{2}) + 4 + \left(\frac{8}{2\sqrt{2}}\right) = 9,64$$

Es un valor mínimo absoluto del costo unitario.

d) Trazar las curvas del costo total, del costo promedio y del costo marginal en el mismo sistema de coordenadas verificar que los costos promedios y marginales son iguales cuando el costo promedio tiene un valor mínimo:



8) la curva del costo total de producción o artículo está dado por $y = 15x - 8x^2 + 2x^3$, de donde y representa el costo total y, x representa la cantidad producida. Suponga que las condiciones del mercado indican que deberán producirse entre 3 y 10 unidades (esto es $3 < x < 10$). Determinar la cantidad en este mercado para lo cual el costo medio o promedio es mínimo.

Solución:

$$\bar{c} = \frac{C(x)}{x} = \frac{15x - 8x^2 + 2x^3}{x} = 15 - 8x + 2x^2 \rightarrow \bar{c}' = -8 + 4x \Rightarrow x = 2$$

$$\bar{c}'' = 4 > 0 \text{ El punto es mínimo.}$$

Pero 2 no esta en el intervalo $3 < x < 10$ por lo tanto el mínimo será $x = 3$ y el costo será.

$$\bar{c}(3) = 15 - 8(3) + 2(3)^2 = 15 - 24 + 18 = 9$$

9) Un fabricante de radios averigua que puede vender x instrumentos por semana a P soles cada uno, siendo $5x = 375 - 3P$. El costo de la producción es $\left(500 + 15x + \frac{x^2}{5}\right)$ soles. Probar que se obtiene la máxima ganancia cuando la producción es alrededor de 30 instrumentos por semana.

Solución:

$$\begin{array}{l} 5x = 375 - 3P \\ P = \frac{375 - 5x}{3} \\ I(x) = xP = \frac{375x - 5x^2}{3} \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} C(x) = 500 + 15x + \frac{x^2}{5} \\ U(x) = I(x) - C(x) = \frac{375x - 5x^2}{3} - \left(500 + 15x + \frac{x^2}{5}\right) \\ U(x) = \frac{1875x - 25x^2 - 7500 - 225x - 3x^2}{15} \\ U(x) = \frac{-28x^2 + 1650x - 7500}{15} \end{array} \right.$$

$$U'(x) = \frac{-56x + 1650}{15} = 0 \Rightarrow x = \frac{1650}{56} = 29,46$$

$$U''(x) = -\frac{56}{15} < 0 \text{ Es máxima relativo.}$$

Por lo tanto 29,46 es alrededor de 30 instrumentos por semana.

10) Esta semana en una fábrica se produjeron 50 unidades de cierta mercancía y la cantidad de producción aumenta a razón de 2 unidades por semana. Si $C(x)$ soles es el costo de producción de " x " unidades donde $C(x) = 0,08x^3 - x^2 + 10x + 48$, calcule la rapidez actual a la que el costo de producción aumenta.

Solución:

$$\frac{dx}{dt} = 2 \frac{\text{unid}}{\text{sem}}$$

$$\frac{dc(x)}{dt} = 0,24x^2 \frac{dx}{dt} - 2x \frac{dx}{dt} + 10 \frac{dx}{dt} = 0,24x^2(2) - 2x(2) + 10(2) = 0,48x^2 - 4x + 20$$

$$\frac{dc(50)}{dt} = 0,48(50)^2 - 4(50) + 20 = 1020$$

El costo de producción aumenta a razón de 1020 por semana.

11) en cierto mercado, la demanda por una clase especial de cereal para el desayuno esta indicada por la ecuación de la demanda $px + 25p = 4000$, donde p centavos es el precio de una caja y “x” miles de cajas es la cantidad semanal demandada. Si el precio actual de este cereal es de 80centavos por cada caja y este precio aumenta a razón de 0,2centavos semanales. Calcule la razón de cambio de la demanda.

Solución:

$$\frac{dP}{dt} = 0,2 \frac{\text{ctvos}}{\text{sem}}$$

$$x = \frac{4000 - 25P}{P} = \frac{4000}{P} - 25$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dP} \cdot \frac{dP}{dt} = -\frac{4000}{P^2} \cdot (0,2) = -\frac{800}{P^2}$$

$$\frac{d(80)}{dt} = -\frac{800}{(80)^2} = -0,125$$

La demanda disminuye a razón de 125 cajas por semana.

12) La ecuación demanda d cierta mercancía es $(p+4)(x+3)=48$, donde se demandan 100x unidades cuando el precio unitario es “p” soles.

Evaluar:

- a) la función del ingreso total.
- b) la función del ingreso marginal.
- c) calcular el ingreso total máximo absoluto.

Solución:

a) la función del ingreso total:

$$(p+4)(x+3)=48$$

$$p = \frac{48}{x+3} - 4$$

$$I(x) = x p = x \left(\frac{48}{x+3} - 4 \right)$$

$$I(x) = \frac{48x}{x+3} - 4x$$

b) la función del ingreso marginal:

$$I'(x) = \frac{(48x)'(x+3) - (48x)(x+3)'}{(x+3)^2} - 4 = \frac{48x+144-48x}{(x+3)^2} - 4 = \frac{144}{(x+3)^2} - 4$$

c) calcular el ingreso total máximo absoluto:

$\frac{144}{(x+3)^2} - 4 = 0$ $(x+3)^2 = \frac{144}{4}$ $x+3 = \sqrt{36}$ $x = 6-3 = 3$	$I''(x) = -\frac{288}{(x+3)^3}$ $I''(3) = -\frac{288}{(3+3)^3} < 0$ Es máximo	$I(3) = \frac{48(3)}{3+3} - 4(3) = 24 - 12 = 12$ Es el ingreso total máximo.
---	--	---

13) Suponga que en cierta firma manufacturera el costo de producción esta dado por $C(x) = 10 - 8x + 2x^2$ (en millones de soles), donde “x” es el mínimo de unidades producidas (en millones). Suponga que el precio por millón de unidades esta dado por $\frac{30}{x} + 24 - 22x + 8x^2 - x^3$. Determinar cuantas unidades debe vender para que su utilidad sea máxima.

Solución:

$$U(x) = I(x) - C(x) = \frac{30}{x} + 24 - 22x + 8x^2 - x^3 - (10 - 8x + 2x^2) = \frac{30}{x} + 14 - 14x + 6x^2 - x^3$$

$$U'(x) = -\frac{30}{x^2} - 14 + 12x - 3x^2 = 0$$

$$-\frac{30}{x^2} - 14 + 12x - 3x^2 = 0$$

14) Una compañía que fabrica y vende escritorios opera en competencia perfecta y puede vender su producto a un precio de S/.200 toda su producción. Si se fabrican “x” escritorios y se venden cada semana, y $C(x)$ soles es el total de producción semanal, entonces $C(x) = x^2 + 40x + 3000$. Determinar cuantas unidades deben producirse a la semana para que el fabricante obtenga la máxima utilidad semanal ¿Cuál es la utilidad total de la semana?

$$U(x) = I(x) - C(x) = 200x - (x^2 + 40x + 3000) = -x^2 + 160x - 3000$$

$U'(x) = -2x + 160 = 0$ $x = 80$ 9 escritorios es la cantidad que deben producirse a la semana para que el fabricante obtenga la máxima utilidad semanal	$U''(x) = -2 < 0$ Es máximo relativo
--	---

$$U(80) = -(80)^2 + 160(80) - 3000 = 3400 \text{ Soles es la utilidad total de la semana.}$$

15) Suponga que “x” denota el numero de unidades (medido en millones) de cierta mercancía producida por un monopolio, suponga que el precio de venta (en dólares) de la mercancía depende de “x”, la oferta de acuerdo con la formula $14 - 3x$ (ecuación de la demanda). Considera que el costo de producir “x” unidades es $x^2 + 5x$ millones de soles. Suponga además que el gobierno graba la mercancía con impuesto del 20%. ¿Cuántas unidades debe producir el monopolio para maximizar sus utilidades?

Solución:

Función ingreso	Función costo	Función utilidad
$I(x) = xP(x) = x(14 - 3x)$ $I(x) = 14x - 3x^2$	$C(x) = x^2 + 5x + 0,2x$	$U(x) = R(x) - C(x)$ $U(x) = 14x - 3x^2 - (x^2 + 5x + 0,2x)$ $U(x) = -4x^2 + 8,8x$

$$U'(x) = -8x + 8,8 = 0$$

$$x = 1,1$$

$$U''(x) = -8 < 0 \text{ Es máximo}$$

1 100 000 millones de unidades para maximizar sus utilidades.

16) En un monopolio la ecuación de la demanda de una cierta mercancía es $p + 2\sqrt{x+1} = 6$, y la función del costo esta dado por $C(x) = 2x + 1$.

a) determinar los posibles valores de “x”.

b) evalúe las funciones de ingreso y costo marginal.

c) calcule el valor de “x” que produce máxima utilidad.

Solución:

a) determinar los posibles valores de “x”:

$$p = 6 - 2\sqrt{x+1}$$

$$x+1 \geq 0$$

$$x \geq -1$$

b) evalúe las funciones de ingreso y costo marginal:

Función de ingreso	Función costo marginal
$I(x) = x p = x(6 - \sqrt{x+1}) = 6x - x\sqrt{x+1}$	$C'(x) = 2$

c) calcule el valor de “x” que produce máxima utilidad:

$$U(x) = 6x - x\sqrt{x+1} - (2x+1) = 4x - x\sqrt{x+1} - 1$$

$$U'(x) = 4 - \left[(x)'(\sqrt{x+1}) + (x)(\sqrt{x+1})' \right] = 4 - \sqrt{x+1} - \frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{8\sqrt{x+1} - 2x - 2 - 1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{8\sqrt{x+1} - 2x - 3}{2\sqrt{x+1}}$$

$\frac{8\sqrt{x+1} - 2x - 3}{2\sqrt{x+1}} = 0$ $(8\sqrt{x+1})^2 = (2x+3)^2$ $64x + 64 = 4x^2 + 6x + 9$ $4x^2 - 58x - 55 = 0$ $x = \frac{58 \pm \sqrt{(58)^2 - 4(4)(-55)}}{2(4)} = \frac{58 \pm \sqrt{4244}}{8} = \frac{58 \pm 65,15}{8}$	$x = \frac{58 + 65,15}{8} = 15,39$ $x = \frac{58 - 65,15}{8} = -0,89$
--	--

	15 unidades producen la máxima utilidad.
--	--

17) Calcule el monto máximo del impuesto sobre la renta que puede captar el gobierno si este graba un impuesto agregado a un monopolista por cada unidad que produce; la ecuación de la demanda del fabricante es $x + 3p = 75$, donde se demandan “x” unidades cuando el precio unitario es “p” soles y $C(x) = 3x + 100$, donde $C(x)$ soles es el costo total de producción de “x” unidades.

Solución:

$p = \frac{75 - x}{3}$ Función de ingreso $I(x) = x p = x \left(\frac{75 - x}{3} \right) = \frac{75x - x^2}{3}$	Función costo marginal $C(x) = 3x + 100 + t x$ $U(x) = I(x) - C(x) = \frac{75x - x^2}{3} - (3x + 100 + tx)$ $U(x) = \frac{-x^2 + 66x - 3tx - 300}{3} = 0$
---	--

$$\frac{-2x + 66 - 3t}{3} = 0$$

$$x = \frac{66 - 3t}{6}$$

$$I_g(t) = x t = \left(\frac{66 - 3t}{6} \right) t = \frac{66t - 3t^2}{6}$$

$$I'_g(t) = \frac{66 - 6t}{6} = 0 \Rightarrow 66 - 6t = 0 \Rightarrow t = 11$$

18) El ingreso total obtenido de la venta de “x” escritorios es $I(x) = 200x - \frac{2}{3}x^2$. Determine:

a) la ecuación de la demanda:

$$I(x) = xp$$

$$200x - \frac{2}{3}x^2 = xp$$

$$p = 200 - \frac{2x}{3}$$

$$3p = 600 - 2x$$

b) la función del ingreso marginal:

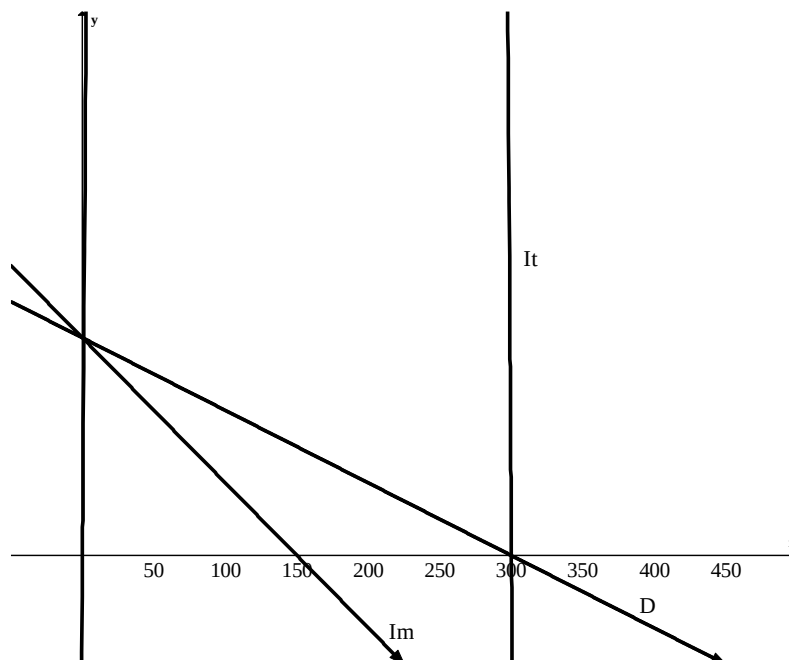
$$I'(x) = 200 - \frac{4}{3}x$$

c) calcule el ingreso total máximo absoluto:

$$200 - \frac{4}{3}x = 0$$
$$x = 150$$

$$I(150) = 200(150) - \frac{2}{3}(150)^2 = 29999,9 \approx 30000$$

d) trace las curvas de: demanda, ingreso marginal e ingreso total sobre el mismo conjunto de ejes:



19) en un monopolio la ecuación de la demanda de un cierto producto es $p = 190 - 0,003x$, donde se demandan “x” unidades cuando el precio unitario es “p” centavos. Si $C(x)$ centavos es el costo total de producción de “x” unidades, entonces $C(x) = 50000 + 4x$. Si se desea maximizar la utilidad total, obtenga:

Solución:

a) el número de unidades que deben producirse:

Función de ingreso $I(x) = x p = x(190 - 0,003x) = 190x - 0,003x^2$	$U(x) = I(x) - C(x) = 190x - 0,003x^2 - (50000 + 4x)$ $U(x) = -0,003x^2 + 186x - 50000$ $U'(x) = -0,006x + 186 = 0$ $x = \frac{186}{0,006} = 31000$
--	---

b) el precio unitario:

$$p = 190 - 0,003(31000) = 97$$

c) la utilidad total.

$$U(31000) = -0,003(31000)^2 + 186(31000) - 50000 = 2833000$$

20) La ecuación de la demanda de un monopolista es $100p = (100 - x)^2$ donde se demandan “x” unidades cuando el precio unitario es “p” soles. La función de costo total esta dado por $C(x) = 55x - \frac{4}{5}x^2$, donde $C(x)$ es el costo total de producción de “x” unidades. (a) Calcular el precio que el monopolista debe fijar a fin de obtener la máxima utilidad total; (b) si el gobierno graba al monopolista un impuesto de S/.9 por cada unidad que produce, determine el precio unitario para obtener la máxima utilidad.

Solución:

a) Calcular el precio que el monopolista debe fijar a fin de obtener la máxima utilidad total:

$p = \frac{(100 - x)^2}{100}$ Función de ingreso $I(x) = x p = x \left(\frac{10000 - 200x + x^2}{100} \right) = 100x - 2x^2 + \frac{x^3}{100}$ $U(x) = I(x) - C(x)$ $U(x) = 100x - 2x^2 + \frac{x^3}{100} - \left(55x - \frac{4}{5}x^2 \right) = 0,01x^3 - \frac{6}{5}x^2 + 45x$	$U'(x) = 0,03x^2 - \frac{12}{5}x + 45$ $U'(x) = 0,15x^2 - 12x + 225$ $U'(x) = 15x^2 - 1200x + 22500$ $U'(x) = x^2 - 80x + 1500 = 0$ $(x - 50)(x - 30) = 0$ $x = 50 \quad x = 30$
---	--

$$p = \frac{(100 - 50)^2}{100} = \frac{2500}{100} = 25$$

$$p = \frac{(100 - 30)^2}{100} = \frac{4900}{100} = 49$$

Pueden ser dos precios a 25 o a 49soles.

b) si el gobierno graba al monopolista un impuesto de S/.9 por cada unidad que produce, determine el precio unitario para obtener la máxima utilidad:

$p = \frac{(100 - x)^2}{100}$ Función de ingreso $I(x) = x p = x \left(\frac{10000 - 200x + x^2}{100} \right) = 100x - 2x^2 + \frac{x^3}{100}$ Función costo $C(x) = 55x - \frac{4}{5}x^2 + 9x = 64x - \frac{4}{5}x^2$ $U(x) = I(x) - C(x)$ $U(x) = 100x - 2x^2 + \frac{x^3}{100} - \left(64x - \frac{4}{5}x^2 \right) = 0,01x^3 - \frac{6}{5}x^2 + 36x$	$U'(x) = 0,03x^2 - \frac{12}{5}x + 36$ $U'(x) = 0,15x^2 - 12x + 180$ $U'(x) = 15x^2 - 1200x + 18000$ $U'(x) = x^2 - 80x + 1200 = 0$ $(x - 60)(x - 20) = 0$ $x = 60 \quad x = 20$
--	--

$$p = \frac{(100 - 60)^2}{100} = \frac{400}{100} = 4$$

$$p = \frac{(100 - 20)^2}{100} = \frac{6400}{100} = 64$$

CAPITULO 03

OFERTA Y DEMANDA: MODELO MATEMÁTICO CON ECUACIONES DIFERENCIALES

CAPÍTULO 03

Oferta Y Demanda: Modelo Matemático Con Ecuaciones Diferenciales

RESUMEN

Este artículo explora como estas ecuaciones capturan la dinámica de interacción entre oferta y demanda, demostrando como los cambios en variables clave afectan los equilibrios de mercado y las fluctuaciones económicas. Por ende, inicialmente se presenta algunas ideas que se relacionan con los modelos matemáticos en general, para luego dirigirse en uno muy preciso que tiene que ver con las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO), puesto que el modelo de oferta y demanda para su explicación matemática y económica utiliza ecuaciones diferenciales lineales, obteniendo soluciones analíticas y graficas de dichas ecuaciones. Mas adelante, se explicará conceptos básicos referidos a la oferta, la demanda y ecuaciones diferenciales para así tener una mejor comprensión a la hora de elaborar el planteamiento y solución de varios ejemplos de aplicación.

Palabras claves: Ecuación diferencial ordinaria (EDO), Oferta y Demanda, equilibrio de mercado, fluctuaciones económicas.

ABSTRAC

This article explores how these equations capture the dynamics of the interaction between supply and demand, demonstrating how changes in key variables affect market equilibria and economic fluctuations. Therefore, initially some ideas are presented that are related to mathematical models in general, and then we turn to a very precise one that has to do with ordinary differential equations (ODE), since the supply and demand model for its mathematical explanation and economics uses linear differential equations, obtaining analytical and graphic solutions of said equations. Later, basic concepts related to supply, demand and differential equations will be explained in order to have a better understanding when developing the approach and solution of various application examples.

Keywords: Ordinary differential equation (ODE), Supply and Demand, market equilibrium, economic fluctuations.

INTRODUCCIÓN

La economía moderna se rige por la compleja interacción entre la oferta y la demanda, un equilibrio delicado que define el funcionamiento de los mercados (Sancho, Ferran, 1985).

En el corazón de este análisis yace la aplicación de ecuaciones diferenciales, herramientas matemáticas poderosas que permiten modelar y entender los cambios continuos en las cantidades ofrecidas y demandadas en un mercado. A través de este enfoque, buscamos desentrañar las complejidades dinámicas que subyacen a la formación de precios y a la asignación de recursos en la economía.

En nuestro modelo simplificado, examinaremos cómo las tasas de cambio de la oferta y la demanda influyen en la evolución temporal de estas dos fuerzas fundamentales (Montoya & otros, 2011). Este análisis no solo ofrece una perspectiva más profunda sobre el equilibrio del mercado, sino que también plantea preguntas esenciales sobre el impacto de las variables económicas en la toma de decisiones de productores y consumidores.

A medida que nos sumergimos en este estudio, recordemos que, aunque los modelos matemáticos proporcionan una estructura conceptual valiosa, la economía es un sistema dinámico influenciado por una multitud de factores interconectados (Proto, 2013). Este artículo se sumerge en el fascinante mundo de la teoría económica, explorando un enfoque matemático para comprender mejor cómo las fuerzas de oferta y demanda evolucionan con el tiempo. Nuestro objetivo es proporcionar una introducción accesible a este enfoque matemático, sin perder de vista la riqueza y complejidad del mundo económico real.

Imagina las ecuaciones diferenciales como un puente entre el pasado y el futuro, capturando la esencia de cómo las cosas cambian y evolucionan. En estas páginas matemáticas, encontrarás desafíos intrigantes y soluciones elegantes. Cada ecuación es como un enigma que espera ser resuelto, y cada solución es una victoria sobre la complejidad. Así que, intrépido lector, te invitamos a sumergirte en el apasionante mundo de las ecuaciones diferenciales y su uso en la oferta y la demanda y como cambia su comportamiento a través del tiempo y los diversos factores que influyen en él. Que cada derivada y cada integral te lleven más cerca de la comprensión profunda de los procesos que dan forma a nuestro universo económico.

1. EL MODELO MATEMÁTICO DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

Vale la pena señalar que, desde un punto de vista estrictamente matemático, existen muchos modelos que también describen una amplia gama de situaciones reales. Uno de ellos es el método de las ecuaciones diferenciales, donde es necesario definir algunos elementos básicos en torno a esta herramienta matemática.

1.1. ECUACION DIFERENCIAL

Una ecuación diferencial es una ecuación matemática que involucra una función desconocida y una o más de sus derivadas. Estas ecuaciones expresan relaciones entre la función y sus derivadas.

1.1.1 Clasificación según su tipo. Las ecuaciones diferenciales tienen dos tipos, si la ecuación desconocida depende de una sola variable se denomina Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO), de lo contrario si la ecuación desconocida depende de varias variables se denomina Ecuación Diferencial Parcial (EDP).

Forma de la EDO:

La ecuación diferencial contiene derivadas de una o más variables dependientes con respecto a una sola variable independiente.

$$\frac{dy}{dx} = x - y^2$$

$y = y(x)$ es la función desconocida y x es la variable independiente.

Cuando aparecen derivadas de orden mayor como por ejemplo $\frac{d^2y}{dx^2}; \frac{d^3y}{dx^3}; \frac{d^4y}{dx^4}; \dots; \frac{d^ny}{dx^n}$, se tienen que utilizar con frecuencia sus notaciones respectivas $y^{(2)}; y^{(3)}; y^{(4)}; \dots; y^{(n)}$.

Forma de EDP:

La ecuación diferencial contiene derivadas parciales de una o más variables dependientes con respecto a dos o más variables independientes.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

En la forma de la EDP se considera que $u = u(x, y)$ es la función desconocida y x, y son las variables independientes.

1.1.2 Clasificación según su orden:

El orden de una ecuación diferencial está determinado por el orden de la derivada más grande que aparece en la ecuación. Para este propósito se utilizan números ordinales. La EDO (1) es de primer orden, la EDO (2) es de segundo orden, la EDO (3) es de tercer orden y así sucesivamente.

$$\begin{cases} \text{Primer orden } F(x, y, y') = 0 \\ \text{Segundo orden } F(x, y, y', y'') = 0 \\ \text{Tercer orden } F(x, y, y', y'', y''') = 0 \\ \vdots \\ \text{Orden } n \text{ } F(x, y, y', y'', y''', y^n) = 0 \end{cases}$$

1.1.3 Clasificación según su grado:

Las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) pueden clasificarse según su linealidad en dos categorías principales: ecuaciones diferenciales ordinarias lineales y ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales.

1.1.3.1 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Lineales (EDO Lineales):

➤ Una EDO se considera lineal si es lineal en las incógnitas y sus derivadas. Esto significa que la función y todas sus derivadas aparecen elevadas a la potencia 1 y no se multiplican ni dividen entre sí.

➤ La forma general de una EDO lineal de primer orden es: $a(x) \frac{dy}{dx} + b(y) = c(x)$.

➤ La forma general de una EDO lineal de orden superior es: $a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$

➤ Cabe recalcar que $a(x), b(x), c(x), a_n(x), a_{n-1}(x), \dots, a_1(x), a_0(x), g(x)$ son funciones dadas en términos de x .

1.1.3.2 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias No Lineales (EDO No Lineales):

- Una EDO es no lineal si contiene términos no lineales en las incógnitas o sus derivadas. Esto significa que las funciones y/o sus derivadas pueden aparecer elevadas a potencias mayores que 1 o multiplicarse/dividirse entre sí.

- Ejemplos de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales incluyen: $\frac{dy}{dx} = y^2$, $\frac{d^2 y}{dx^2} + \sin(y) = 0$, etc.

En resumen, clasificar una EDO como lineal o no lineal depende de cómo se relacionan las incógnitas y sus derivadas en la ecuación. Si aparecen linealmente (con potencia 1) y no se multiplican ni dividen entre sí, la EDO es lineal; de lo contrario, se considera no lineal.

1.1.4 Clasificación según su homogeneidad

1.1.4.1 Ecuaciones diferenciales homogéneas:

- Todas las funciones y sus derivadas en la ecuación son funciones homogéneas de la misma orden.
- Se pueden hacer más homogéneas mediante una sustitución apropiada, como la introducción de una nueva variable.
- La forma general de una ecuación diferencial homogénea es $F(x; y; y'; y''; \dots; y^{(n)}) = 0$, donde F es una función homogénea de la misma orden.

Ejemplo:

$$y^n + \frac{x}{y} = 0$$

1.1.4.2 Ecuaciones diferenciales no homogéneas:

- Contienen al menos un término que no es una función homogénea de la misma orden.
- Pueden requerir métodos particulares, como el método de variación de parámetros, para encontrar soluciones.
- La forma general de una ecuación diferencial no homogénea es $F(x; y; y'; y''; \dots; y^{(n)}) = G(x)$, donde $G(x)$ es una función no homogénea.

Ejemplo:

$$y^n + \frac{x}{y} = \text{sen}(x)$$

Esta clasificación es importante porque los métodos y estrategias para resolver ecuaciones diferenciales homogéneas pueden diferir de los utilizados para ecuaciones no homogéneas. La homogeneidad simplifica hasta cierto punto el análisis y la solución de ecuaciones diferenciales.

2. SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL ORDINARIA

Ejemplo 1.

$$(x + y + 1) dx + (6x + 10y + 14) dy = 0$$

Solución:

La ecuación diferencial dada es una ecuación de coeficientes lineales. En este caso se tiene que: $a_1 = 1$, $a_2 = 6$, $b_1 = 1$, $b_2 = 10$, $c_1 = 1$, $c_2 = 14$.

Luego: $a_1 b_2 = 1(10) \neq a_2 b_1 = 6(1)$.

Hacemos uso de las transformaciones siguientes:

$$x = u + h$$

$$y = v + k$$

Ahora, reemplazamos en la ecuación diferencial:

$$(u + h + v + k + 1) du + (6u + 6h + 10v + 10k + 14) dv = 0$$

$$(u + v + h + k + 1) du + (6u + 10v + 6h + 10k + 14) dv = 0$$

Resolviendo el sistema:

$$h + k + 1 = 0$$

$$6h + 10k + 14 = 0$$

Obtenemos: $h = 1$, $k = -2$

Ahora, resolvemos

$$(u + v)du + (6u + 10v) dv = 0$$

Usamos la sustitución $u = av$:

$$(av + v)(adv + vda) + (6av + 10v) dv = 0$$

$$(a + 1) v (adv + vda) + (6a + 10)v dv = 0$$

$$(a + 1)(adv + vda) + (6a + 10) dv = 0$$

$$\frac{dv}{v} + \frac{(a + 1)da}{(a + 5)(a + 2)} = 0$$

$$\frac{dv}{v} + \left[\frac{(a + 1)da}{3(a + 5)(a + 2)} \right] dv = 0$$

$$3 \ln(v) + 4 \ln(a + 5) - \ln(a + 2) = \ln c$$

$$v^3(a + 5)^4 = c(a + 2)$$

Reemplazando $a = \frac{u}{v}$:

$$(u + 5v)^4 = c(u + 2v)$$

Finalmente.

$$u = x - h = x - 1$$

$$v = y - k = y + 2$$

2.1. Método Separación de Variables

El método de separación de variables es un método utilizado en el campo de las ecuaciones diferenciales para resolver ecuaciones en las que se busca una función que cumpla una cierta relación entre sus derivadas y variables independientes.

Este método se aplica tanto a ecuaciones diferenciales ordinarias como a ecuaciones en derivadas parciales.

El proceso general del método de separación consiste en tomar una ecuación diferencial que involucre varias variables y sus derivadas, y manipularla de modo que las variables puedan "separarse" en opuestas. ecuación.

Luego, los dos bandos se integran para obtener un general.

2.1.1. Estrategia para la resolución de problemas: Separación de variables

2.1.1.1. Comprobar si hay valores de y que hacen $g(y) = 0$. Estos corresponden a soluciones constantes.

2.1.1.2. Reescribir la ecuación diferencial en la forma $\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$.

2.1.1.3. Integramos ambos lados de la ecuación.

2.1.1.4. Resolvemos la ecuación resultante para y si es posible. No siempre es posible obtener y como función explícita de x . A menudo tenemos que concordar con hallar y como función implícita de x .

2.1.1.5. Si existe una condición inicial, sustituimos los valores adecuados por x como y en la ecuación y resolvemos la constante.

Ejemplo 2.

$$f(x) = x^2 - 4 \text{ y } g(y) = 3y + 2$$

Si establecemos que $g(y) = 0$ da como resultado $y = -\frac{2}{3}$ como solución constante

Reescribimos la ecuación diferencial en la forma de:

$$\frac{dy}{3y + 2} = (x^2 - 4)dx$$

Integramos ambos lados de la ecuación:

$$\int \frac{dy}{3y + 2} = \int (x^2 - 4)dx$$

Supongamos que $u = 3y + 2$. Entonces $du = 3 \frac{dy}{dx} dx$, por lo que la ecuación se convierte en

$$\frac{1}{3} \int \frac{1}{u} du = \frac{1}{3} x^3 - 4x + C$$

$$\frac{1}{3} \ln|u| = \frac{1}{3} x^3 - 4x + C$$

$$\frac{1}{3} \ln|3y + 2| = \frac{1}{3} x^3 - 4x + C$$

Para darle solución a esta ecuación para y , multiplicamos primero ambos lados de la ecuación por 3.

$$\ln|3y + 2| = x^3 - 12x + 3C$$

Tratamos con la constante C . Dado que C representa una constante arbitraria, $3C$ también representa una constante arbitraria. Si llamamos a la segunda ecuación constante arbitraria C_1 , la ecuación quedaría en:

$$\ln|3y + 2| = x^3 - 12x + C_1$$

Ahora, potenciamos ambos lados de la ecuación:

$$e^{\ln|3y+2|} = e^{x^3-12x+C_1}$$

$$|3y + 2| = e^{C_1} e^{x^3-12x}$$

Definamos la nueva constante $C_2 = e^{C_1}$, (vemos que, $C_2 > 0$):

$$|3y + 2| = C_2 e^{x^3-12x}$$

Corresponde a dos ecuaciones distintas: $3y + 2 = C_2 e^{x^3-12x}$ y $3y + 2 = -C_2 e^{x^3-12x}$

Cualquiera de las dos ecuaciones la podemos escribir en la forma de $y = \frac{-2 \pm C_2 e^{x^3-12x}}{3}$

Dado que C_2 no importa si usamos el más o el menos, por lo que la constante puede tener cualquiera de los dos signos. Además, el subíndice de la constante C es totalmente arbitrario y se puede omitir. Por lo tanto, la solución puede escribirse como:

$$y = \frac{-2 + C_2 e^{x^3-12x}}{3}$$

Por lo tanto, como no se impone ninguna condición inicial, hemos terminado el ejemplo.

2.2. Método de Coeficientes Indeterminados

Es una técnica que se utiliza para encontrar soluciones de ecuaciones diferenciales lineales particulares no homogéneas.

Este método es particularmente aplicable cuando la función no homogénea tiene una forma específica, como una función polinómica, exponencial, trigonométrica u otra función fácilmente identificable.

Los pasos que se deben de seguir son los siguientes:

2.2.1. Resolver la ecuación homogénea asociada, denominada y_c .

2.2.2. Se supone una solución particular de la forma cuadrática como $y_p = Ax^2 + Bx + c$.

2.2.3. Determinar los coeficientes A, B y C para los cuales y_p sea una solución de la ecuación a desarrollar.

2.2.4. Sustituir e igualar los coeficientes de potencia de x para hallar una solución en y_p .

2.2.5. La solución general será la suma de la solución de la ecuación homogénea y la particular, esto es: $y = y_c + y_p$.

2.3. Método de Variación de Parámetros

En este método también se utiliza para resolver ecuaciones diferenciales no homogéneas. Este método es especialmente aplicable cuando ya se ha encontrado la solución general de la ecuación diferencial homogénea asociada y se busca una solución particular.

El método de variación de parámetros es utilizado para ecuaciones diferenciales lineales de la forma:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

La solución de la ecuación diferencial sería:

$$y = y_c + y_p$$

Se forma a partir de la solución complementaria calculada mediante el método de coeficientes constantes a la ecuación homogénea asociada.

$$y_c = c_1y_1 + c_2y_2 = C_1e^{m_1x} + C_2e^{m_2x}$$

La solución particular calculada usando las funciones auxiliares

$$y_p = u_1y_1 + u_2y_2 = u_1e^{m_1x} + u_2e^{m_2x}$$

$$u_1 = - \int \frac{y_2 f(x) dx}{W}$$

$$u_2 = \int \frac{y_1 f(x) dx}{W}$$

W es el Wronskiano de y_1 y y_2 definido por el siguiente determinante:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

El método consiste en:

2.3.1. Hallar la solución complementaria usando la ecuación homogénea asociada y el método de coeficientes constantes.

2.3.2. Hallar el Wronskiano.

2.3.3. Hallar las funciones auxiliares y la solución particular.

2.4. Método de Euler o runge-kutta

Son técnicas numéricas utilizadas para resolver ecuaciones ordinarias en problemas de valores iniciales. Estos métodos son particularmente útiles cuando es imposible obtener soluciones analíticas exactas o cuando se deben encontrar soluciones analíticas.

2.4.1. Método Euler:

El método se basa en la aproximación de una curva por secuencia de rectas, lo que determina los errores de cálculo iniciales.

Este método requiere que utilice valores muy pequeños para obtener una aproximación aceptable de la solución de una ecuación.

La fórmula para una ecuación diferencial de primer orden es:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)$$

Donde y_n es la aproximación de la solución en el paso n , h es el tamaño del paso, x_n es la variable independiente en el paso n , y $f(x_n, y_n)$ es la función que define la derivada.

2.4.2. Método de Runge-Kutta:

El algoritmo del método Runge-Kutta de cuarto orden, o Runge-Kutta clásico, abreviado como RK4, es ampliamente utilizado y como una valiosa herramienta computacional, debido a la buena aproximación que produce.

La siguiente fórmula para una EDO de primer orden:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Donde k_1, k_2, k_3 y k_4 se derivan a partir de evaluaciones de la función derivada en diferentes puntos a lo largo del intervalo de paso.

Ambos métodos son útiles en situaciones donde la ecuación diferencial no se puede resolver analíticamente y se requiere una solución numérica. Sin embargo, es importante tener en cuenta que la elección del método y el tamaño del paso pueden afectar la precisión y estabilidad de la solución numérica. Los métodos de Runge-Kutta, en particular RK4, a menudo se prefieren al método de Euler debido a su mayor precisión.

3. TEORÍA DE LA OFERTA

La teoría de la oferta es un concepto fundamental en economía que explica la cantidad de bienes o servicios que los productores están dispuestos a ofrecer en el mercado a diferentes niveles de precios, manteniendo constantes otros factores. Esta teoría se basa en la relación

entre el precio de un bien o servicio y la cantidad que los productores están dispuestos a producir y vender. (Samuelson, 2010)

3.1. Ley de la oferta: La ley de la oferta establece que, manteniendo todo lo demás constante, la cantidad ofrecida de un bien o servicio aumentará a medida que aumente su precio y disminuirá a medida que disminuya su precio. En otras palabras, hay una relación directa entre el precio y la cantidad ofrecida. (Khan academy, s.f.)

3.2. Curva de oferta: La curva de oferta representa la relación que existe entre los precios y las cantidades ofrecidas. Cuando los precios son altos, se produce mucho por lo que las cantidades ofrecidas son altas mientras que, si los precios disminuyen, la cantidad ofrecida disminuirá. Las curvas de oferta suelen presentar una curvatura cóncava hacia arriba. Una curva de oferta describe las combinaciones de precios y cantidades ofrecidas que pueden darse cuando todos los demás factores que influyen en la oferta se mantienen constantes. (Junta de andalucia, s.f.)

3.3. Factores que afectan la oferta: Varios factores pueden afectar la cantidad que los productores están dispuestos a ofrecer en el mercado, además del precio. Estos factores incluyen los costos de producción, la tecnología, el precio de los insumos, la oferta de factores de producción, las expectativas empresariales y las políticas gubernamentales.

3.4. Oferta a corto y largo plazo: La teoría de la oferta también considera las diferencias a corto y largo plazo. En el corto plazo, algunos factores pueden no ser fácilmente ajustables, como la capacidad de producción, mientras que, en el largo plazo, las empresas pueden ajustar más fácilmente sus niveles de producción.

3.5. Elasticidad de la oferta: La elasticidad de la oferta mide la sensibilidad de la cantidad ofrecida a cambios en el precio. Si la cantidad ofrecida responde significativamente a cambios en el precio, se considera elástica; si responde en menor medida, se considera inelástica.

Se podría decir que la teoría de la oferta proporciona una base para comprender cómo los productores toman decisiones sobre la cantidad de bienes o servicios que están dispuestos a ofrecer en el mercado en función de diversos factores, principalmente el precio. (Mankiw, 2012) (Nordhaus, 2006)

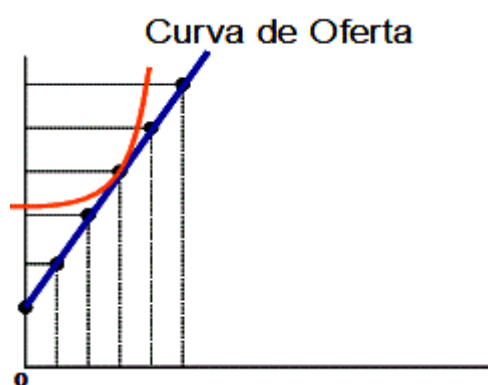
La teoría de la oferta se puede expresar matemáticamente a través de la función de oferta, que describe la cantidad de bienes o servicios que los productores están dispuestos a ofrecer en el mercado a diferentes niveles de precio. La forma específica de la función de oferta puede variar dependiendo de las suposiciones y el contexto del modelo económico utilizado.

La ley de la oferta establece que, ante un aumento en el precio de un bien, la cantidad ofrecida de ese bien será mayor. Esto significa que los productores tienen un incentivo mayor para ofrecer más bienes y servicios cuando los precios suben.

La función de oferta es la ecuación que representa la cantidad fabricada de un bien en función de su precio y otras variables relevantes. Esta función puede incluir factores como la tecnología, los precios de los insumos y el estado de la economía. La función de oferta intenta explicar cómo los competidores de una industria deciden cuánto producir.

La curva de oferta es la representación gráfica de la función de oferta. Tiene las siguientes características:

- ✓ Refleja una relación positiva entre la cantidad ofertada y el precio del producto, lo que se conoce como la ley de oferta. Los vendedores están dispuestos a llevar más stock al mercado si se les paga más por su bien o servicio, y viceversa.
- ✓ La función refleja la dependencia de la cantidad ofertada en relación con el precio y otras variables relevantes.



Supongamos que la función de oferta Q depende del precio P y otros factores:

$$Q = f(P, X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$$

Donde:

- Q es la cantidad ofrecida.
- P es el precio del bien o servicio.
- $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ son otros factores que pueden influir en la oferta, como los costos de producción, la tecnología, etc.

La relación entre Q y P generalmente se expresa con una ecuación o una curva. La forma específica de esta función puede variar y se determina empíricamente o a través de la teoría económica.

Para ilustrar esto, considera una función de oferta lineal simple:

$$Q = a - bP$$

Donde:

- a es la cantidad máxima que los productores están dispuestos a ofrecer a un precio de cero.
- b es la pendiente de la función, que indica cómo cambia la cantidad ofrecida a medida que cambia el precio.

(Aquino Rita, s.f.) (Westreicher, 2019)

4. TEORÍA DE LA DEMANDA

La teoría de la demanda es un concepto fundamental en la microeconomía que busca entender cómo los consumidores toman decisiones sobre la cantidad de bienes y servicios que desean adquirir y cómo estos niveles de demanda se ven afectados por factores como los precios y los ingresos. (Traders studio, 2022)

La ley de la oferta y la demanda es el principio básico en el que se basa una economía de mercado. Esta ley refleja la relación entre la demanda de un producto y la cantidad de ese producto ofrecido, teniendo en cuenta el precio al que se vende el producto. (OpenStax Microeconomics)

La ley de la demanda establece que, manteniendo todo lo demás constante, la cantidad demandada de un bien o servicio disminuye a medida que su precio aumenta y viceversa. (Perloff, 2018) (Mankiw, 2012)

La demanda se representa mediante una curva de demanda, que muestra la cantidad de bienes que los compradores están dispuestos a adquirir a diferentes precios, suponiendo que los demás factores se mantengan constantes. Por lo general, la curva de demanda es decreciente, lo que significa que a medida que aumenta el precio, los consumidores compran menos.

Los determinantes de la demanda incluyen el precio del bien, el nivel de ingresos, los gustos personales, el precio de los bienes sustitutos y el precio de los bienes complementarios. (Aquino Rita, s.f.)

La elasticidad precio de la demanda es un concepto importante en la teoría de la demanda. La elasticidad precio de la demanda mide la sensibilidad de la cantidad demandada de un bien o servicio ante cambios en su precio. Se pueden distinguir tres tipos de elasticidad precio de la demanda: demanda elástica, demanda inelástica y demanda unitaria, comprender la elasticidad es crucial para prever cómo los consumidores responderán a cambios en el mercado. (Hubbard, 2012) (Nicholson, 2011)

La teoría de la demanda busca explicar cómo los consumidores toman decisiones de compra y cómo estos comportamientos se ven afectados por factores como los precios y los ingresos. La ley de la oferta y la demanda es el principio básico que rige la relación entre la demanda de un producto y la cantidad ofrecida, teniendo en cuenta el precio al que se vende el producto. (Krugman, 2015) (Varian, 2014)

Factores que Influyen en la Demanda:

1. Ingresos del Consumidor:

Los cambios en los ingresos pueden afectar significativamente la cantidad de bienes y servicios que los consumidores están dispuestos a comprar. (Pindyck, 2017) (Frank, 2009)

2. Preferencias del Consumidor:

Las preferencias y gustos del consumidor son factores clave que influyen en la toma de decisiones de compra. (Krugman, 2015) (Varian, 2014)

Formulación Matemática:

Supongamos que la función de demanda Q depende del precio P y otros factores:

$$Q = g(P, Y, T \dots Z_n)$$

Donde:

- Q es la cantidad demandada.
- P es el precio del bien o servicio.
- Y es el ingreso del consumidor.
- $T, \dots, Z_n$ son otros factores que pueden influir en la demanda, como los gustos y preferencias del consumidor, precios de bienes relacionados, etc.

La relación entre Q y P se expresa con una ecuación o una curva. La forma específica de esta función puede variar dependiendo del modelo y las suposiciones utilizadas.

5. PRINCIPIO ECONÓMICO DE OFERTA Y DEMANDA

El principio económico de oferta y demanda es uno de los conceptos fundamentales en la teoría económica y describe la interacción entre los productores (oferta) y los consumidores (demanda) en un mercado competitivo. Este principio establece que el precio y la cantidad de un bien o servicio se determinan por las fuerzas del mercado, donde la oferta y la demanda se encuentran.

El principio de oferta y demanda es esencial para entender cómo funcionan los mercados y cómo se determinan los precios. Se utiliza para analizar una amplia variedad de situaciones económicas y es la base de muchas políticas económicas y decisiones empresariales. Además, es un componente clave de la teoría microeconómica.

En su formulación más básica, este modelo económico postula que, en un mercado de competencia perfecta, el precio de mercado se establecerá en un punto de equilibrio donde se iguala la oferta y la demanda. Cuando la demanda supera la oferta, el precio tiende a aumentar, y cuando la oferta supera la demanda, el precio tiende a disminuir.

5.1. La ley de oferta y demanda tiene tres principios fundamentales:

5.1.1. Cuando la demanda supera la oferta, el precio aumenta. Del mismo modo, cuando la oferta supera la demanda, el precio disminuye.

5.1.2. Un aumento en el precio disminuirá la demanda con el tiempo y aumentará la oferta. Por otro lado, una disminución en el precio aumentará la demanda y disminuirá la oferta.

5.1.3. El precio buscará alcanzar el punto en el que la demanda y la oferta se igualen.

Este principio económico es utilizado para explicar una amplia variedad de fenómenos y procesos tanto a nivel macroeconómico como microeconómico. Además, sirve como base para otras teorías y modelos económicos.

Es importante destacar que la ley de oferta y demanda se aplica en una economía de mercado, donde se supone que el mercado regula tanto la oferta como la demanda, así como los precios de los bienes y servicios. (Gerencie, 2022)

La ley de oferta y demanda es un principio económico que establece la relación entre la oferta y la demanda de un producto, teniendo en cuenta el precio al que se vende. Este principio busca alcanzar un punto de equilibrio donde la oferta y la demanda se igualen. (Editorial, Equipo, 2017)

Interacción y Equilibrio de Mercado: La intersección de las curvas de oferta y demanda establece el equilibrio de mercado, donde se determina el precio y la cantidad. Este punto de encuentro es crucial para entender cómo funcionan los mercados en condiciones competitivas. (Pindyck, 2017) (Frank, 2009)

Cambios en la Oferta y Demanda: Los cambios en los determinantes de la oferta o demanda, como costos de producción, tecnología o preferencias del consumidor, pueden desplazar las curvas y alterar el equilibrio de mercado. (Mas-Colell, 1995) (Stiglitz, 2006)

6. Modelos matemáticos usando ecuaciones diferenciales para temas económicos

Se puede crear un modelo matemático usando los datos que afectan a un hecho en específico, en el espacio matemático económico lo definiremos como:

$$S = V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_{n-1} + V_n$$

Siendo "S": el suceso observado y en estudio; y $V_1, V_2 \dots \dots, V_n$; los factores que influyen en la variable de observación.

Ejemplo 3.

Determine un modelo matemático usando ecuaciones diferenciales para explicar cómo influye el tiempo transcurrido en el número de ventas de cualquier bien.

Solución

$$P(t) = \text{numero de ventas}$$

$$P'(t) = \text{tiempo en que las ventas aumentan}$$

El número de ventas aumenta a través del tiempo esto quiere decir que tienen una relación directamente proporcional.

$$A \text{ es directamente proporcional a } B \leftrightarrow A = kB; \text{ siendo } k \text{ una constante}$$

Entonces podemos decir que:

$$P'(t) = kP(t) \Leftrightarrow \frac{dp}{dt} = kp$$

Ecuación diferencial de forma separable

La solución dada si bien es cierto cumple con satisfacer lo que nos pide el enunciado tiene un desperfecto, "**no es tan precisó**", ¿cómo podemos mejorar eso y acercarnos más a un valor perfecto? Tomando como referencia la teoría de integrales las cuales buscan mediante aproximaciones numéricas acercarse lo máximo al valor real del área debajo de una curva. Agregaremos más variables de observación como esta menciona al inicio de esta sección.

$$S = V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_{n-1} + V_n$$

Ejercicio 1.

El precio inicial de la fruta era igual a 1 sol por 1Kg, dentro de t semanas será de $P(t)$ por 1Kg, suponiendo una dependencia lineal de la oferta S y la demanda Q con respecto al precio P y la tendencia P' en el tiempo, se tiene la siguiente expresión:

$$Q = 4P' - 2P + 39$$

$$S = 44P' + 2P - 1$$

Para garantizar el equilibrio entre la oferta y la demanda, se debe cumplir igualdad.

$$4P' - 2P + 39 = 44P' + 2P - 1$$

$$4P' - 44P' = 2P - 1 + 2P - 39$$

$$-40P' = 4P - 40$$

$$-P' = \frac{P}{10} - 1$$

$$-\frac{dP}{dt} = \frac{P - 10}{10}$$

Resolveremos la ecuación diferencial por el método de variables separadas.

$$-\frac{dP}{dt} = \frac{P - 10}{10}$$

Hacemos multiplicación en aspa

$$\frac{dP}{P - 10} = -\frac{dt}{10}$$

Agregamos integral a ambos lados

$$\int \frac{dP}{P - 10} = \int -\frac{dt}{10}$$

Usando un tabal de integración nos da el siguiente resultado

$$\ln|P - 10| + C1 = -\frac{t}{10} + C2$$

Sumamos las constantes

$$\ln|P - 10| = -\frac{t}{10} + C$$

Usamos el "e" para deshacernos del logaritmo

$$e^{\ln|P-10|} = e^{-\frac{t}{10}+C}$$

Quedando de la siguiente forma

$$P - 10 = e^{-\frac{t}{10}} * e^C$$

El " e^C " sigue siendo una constante

$$P - 10 = Ce^{-\frac{t}{10}}$$

Quedando finalmente

$$P = Ce^{-\frac{t}{10}} + 10$$

Para encontrar el valor de C usaremos la condición inicial.

➤ **Con un $t = 0$ el precio de una fruta era igual a $P = 1Kg$**

$$P = Ce^{-\frac{t}{10}} + 10$$

$$1 = Ce^{-\frac{0}{10}} + 10$$

$$1 = Ce^0 + 10$$

$$1 = C + 10$$

$$C = -9$$

➤ **con el valor C se obtiene la expresión final:**

$$P = -9e^{-\frac{t}{10}} + 10$$

En conclusión, el precio que debe mantener para mantener el equilibrio entre la oferta y la demanda, es el de la expresión anterior.

$$P = -9e^{-\frac{t}{10}} + 10$$

CONCLUSIONES

En resumen, el estudio de ecuaciones diferenciales en el contexto de la oferta y la demanda proporciona una valiosa herramienta matemática para comprender y predecir los cambios del mercado. A través de la creación y análisis de modelos matemáticos, descubrimos cómo estas ecuaciones capturan efectivamente las complejas dinámicas que afectan la interacción de la oferta y la demanda en diversos escenarios económicos.

- **Previsión y adaptación:** la capacidad de las ecuaciones diferenciales para modelar la oferta y la demanda demuestra su utilidad para predecir tendencias futuras. Estos patrones permiten a los analistas y tomadores de decisiones predecir cambios en el equilibrio del mercado y ajustar sus estrategias.
- **Centrándonos en las condiciones iniciales:** hemos visto cómo pequeños cambios en las condiciones iniciales pueden tener un gran impacto en el comportamiento a largo plazo del mercado. Este hallazgo muestra la importancia de una comprensión adecuada de los datos primarios y demuestra la comprensión de los sistemas económicos.
- **Estabilidad y equilibrio:** el concepto de estabilidad en los modelos de ecuaciones diferenciales es una afirmación importante sobre la resiliencia de los mercados ante los shocks externos. Conocer la estabilidad le ayudará a evaluar la solidez de su equilibrio financiero e identificar las áreas más importantes en las que centrarse.

En resumen, la ecuación diferencial no es sólo una herramienta teórica, sino también una herramienta práctica para analizar y comprender fenómenos económicos complejos. Al incorporar estas herramientas matemáticas al estudio de la oferta y la demanda, podemos abordar mejor los desafíos dinámicos de la economía y promover el crecimiento sostenible.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

(01 de 04 de 2022). Obtenido de Gerencie:

<https://www.gerencie.com/ley-de-la-oferta-y-la-demanda.html>

Apostol, T. (1999). *calculus*, 1, 100.

Aquino Rita, D. J. (s.f.). *Gestiopolis*. Obtenido de

<https://gestiopolis.com/teoria-de-la-oferta-y-la-demanda/>

Boj del Val, E., & Getán Oliván, J. (2014). *análisis Dinámico-Ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden*.

de Castro, L. I. (2006). Modelos matemáticos del conocimiento con aplicaciones a la economía. *lecturas matematicas*, 27, 225-247.

Editorial, Equipo. (14 de 06 de 2017). Obtenido de Significados.com.:

<https://www.significados.com/ley-de-la-oferta-y-la-demanda/>

Escobar, H. A. (2010). Oferta y demanda: un modelo matemático con ecuaciones diferenciales. *tendencias*, 11, 7-34.

Ferri Sanz, M., Durá Ferrandis, E., & Garcés Ferrer, J. (2015). Tourism as a healthy and active ageing strategy: The effects of tourism on the health of the elderly. *Atencion Primaria*, 547-548.

Frank, R. H. (2009). *Principles of Microeconomics*.

García, C. A. (2017). Health tourism: A form of medicalization of society? *Revista Lasallista de Investigacion*, 51-64.

General, I. y. (1985). Sancho, Ferran. *Interdependencia y Equilibrio General*. In *Enciclopedia de la economía española*, 1-1.

Hubbard, R. G. (2012). *Economics*.

Jover, I. C., & López, E. F. (2011). ecuaciones diferenciales. En r. f. rivera (Ed.). mexico: PEARSON.

Junta de andalucia. (s.f.). Obtenido de

https://www.juntadeandalucia.es/averroes/centros-tic/14002996/helvia/aula/archivos/repositorio/250/271/html/economia/3/movimiento_oferta.htm

Khan academy. (s.f.). *Khan Academy*. Obtenido de

<https://es.khanacademy.org/economics-finance-domain/microeconomics/supply-demand-equilibrium/supply-curve-tutorial/a/law-of-supply>

Krugman, P. &. (2015). *Microeconomics*.

Mankiw:, N. G. (2012). *Principios de Economía*. Madrid. España: Thomson Paraninfo.

Mas-Colell, A. W. (1995). *Microeconomic Theory*.

Montoya, R., & otros. (2011). la tasa de cambio nominal: una aproximación desde la oferta y demanda de divisas. *Perfil de Coyuntura Económica*, 73-110.

Nápoles Valdés, J. &. (2002). la historia de las ecuaciones diferenciales ordinarias . 33-57.

Neira Bueno, O. (s.f.).

Nicholson, W. &. (2011). *Microeconomic Theory: Basic Principles and Extensions*.

Nordhaus, P. A. (2006). *Microeconomía*. Madrid. España: McGraw-Hill Interamericana.

OpenStax Microeconomics. (s.f.). *Demand, Supply, and Equilibrium in Markets for Goods and Services*.

OpenStax Microeconomics. (s.f.). *Demanda, oferta y equilibrio en los mercados de bienes y servicios*.

ortiz. A, H. H. (2007). una experiencia pedagógica en la enseñanza de ecuaciones diferenciales exactas y los factores integrantes . 7.

Oyola De Los Rios, D. D. (2020). Ecuaciones diferenciales ordinarias en la solución de problemas de oferta y demanda asistidos con Matlab.

Pearce, D. W. (1999). *Diccionario Akal de economía moderna*. ediciones akal.

Perloff, J. M. (2018). *Microeconomics*.

Pindyck, R. S. (2017). *Microeconomics*.

Proto, A. N. (2013). *Advanced Dynamic Modeling of Economic and Social Systems*.

- Ríos-Ocampo, J. P., Olaya-Morales, Y., & Rivera-León, G. J. (2017). Proyección de la demanda de materiales de construcción en Colombia por medio de análisis de flujos de materiales y dinámica de sistemas. *Revista Ingenierías Universidad de Medellín*, 16, 75-95.
- Ros, J. (2012). La Teoría General de Keynes y la macroeconomía moderna. *Investigación económica*, 71, 19-37.
- Ruiz de Chávez, M., Jiménez Aguado, R., Márquez Laposse, M., & Alleyne, G. (1994). Health and turism. *Salud Publica de Mexico*, 61-69.
- Samuelson, P. A. (2010). *Economics*.
- Sánchez, M. A. (2020). as ecuaciones diferenciales y su aplicación en la economía. *E-IDEA Journal of Business Sciences*, 2, 1-7. Obtenido de <https://revista.estudioidea.org/ojs/index.php/eidea/article/view/17>
- Simón, C. B. (2019). Un modelo de oferta y demanda con incertidumbre. *Modelling in science education and learning*, 12, 111-122.
- SPIEGEL, M. R. (1983). ecuaciones diferenciales aplicadas . mexico: prentice-hall hispanoamericana.
- Stiglitz, J. E. (2006). *Principles of Microeconomics*.
- Tenorio Villalón, A. F. (2013). Ecuaciones diferenciales y en diferencias aplicadas a los conceptos econó}micos y financieros. *Revista de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa*, 165-199.
- Traders studio. (25 de mayo de 2022). Obtenido de <https://traders.studio/teoria-de-la-demanda/>
- Ucha, A. P. (1 de marzo de 2020). *Economipedia*. Obtenido de <https://economipedia.com/definiciones/demanda.html>
- Varian, H. R. (2014). *Intermediate Microeconomics: A Modern Approach*.

Vilches Mendoza, G. (2019). Modelos matemáticos basados en ecuaciones diferenciales y su aplicación a la económica.

Westreicher, G. (20 de Julio de 2019). *Economipedia*. Obtenido de

<https://economipedia.com/definiciones/funcion-de-oferta.html>

Strang, G. (2022b, marzo 24). 4.3 Ecuaciones separables - Cálculo volumen 2 | OpenStax.

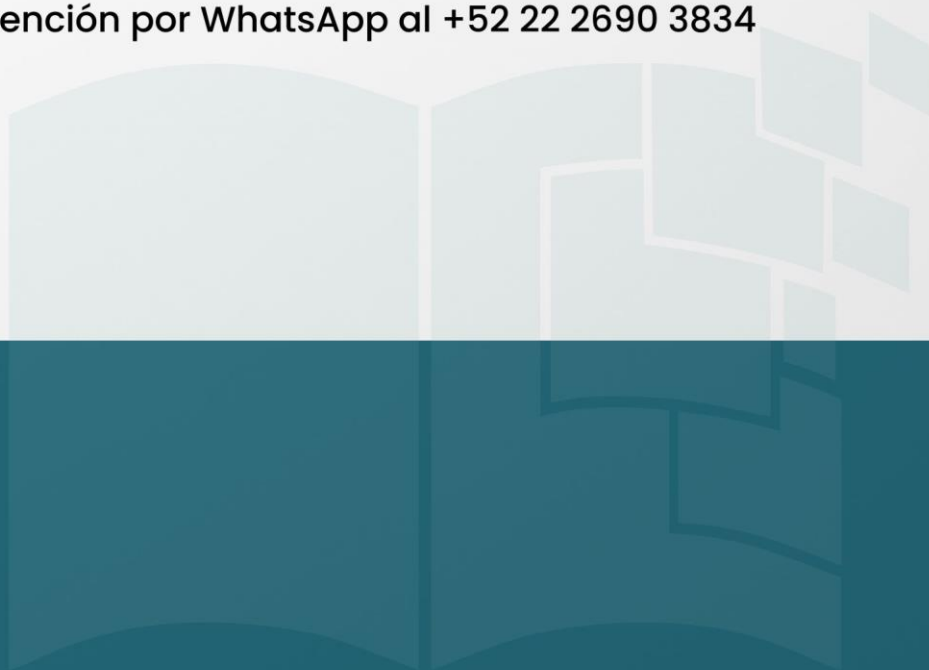
<https://openstax.org/books/c%C3%A1lculo-volumen-2/pages/4-3-ecuaciones-separables>

Beltran, J. (2023, 25 septiembre). 9.5.7 VARIACIÓN DE PARÁMETROS. CÁLCULO 21.

<https://calculo21.com/9-5-7-variacion-de-parametros/>

ANÁLISIS COMPARATIVO DE LOS MÉTODOS DE EULER Y RUNGE-KUTTA EN LA SOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN MEDIANTE PROGRAMACIÓN EN MATHCAD. (2016). *Ingeniería, Matemáticas y Ciencias de la Información*, 3.

Mayo 2024 - CID - Centro de Investigación y Desarrollo
Copyright © - CID - Centro de Investigación y Desarrollo
Copyright del texto © 2024 de Autores
Formato: PDF
Tamaño: A4 210 x 297 mm
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acceso: World Wide Web
biblioteca.ciencialatina.org
editorial@ciencialatina.org
Atención por WhatsApp al +52 22 2690 3834



ISBN: 978-99989-67-30-4

